COLLECTION OF THE BEST INTERNATIONAL MATHEMATIC COMPETITIONS

for secondary school students

__PHAM HIEN VINH__

Chương 1

LỜI MỞ ĐẦU

1.1 Lời tựa

Các em học sinh thân mến!

Khác với những học sinh chuyên Toán khác, xuất phát điểm của anh với môn học này khá là muộn. Là một học sinh luôn có ước mơ bước vào một trong những trường cấp 2 danh giá nhất Hà Nội, anh đã có 3 cơ hội để cố gắng bước vào vòng thi Quốc gia Violympic Toán ở năm lớp 3,4,5. Tuy vậy, ở cả 3 lần thi anh đều chỉ dừng lại ở vòng thi cấp quận với số điểm cao nhất mà bản thân có thể đạt được là 260/300 (lúc đó số điểm để bước tiếp vào vòng Thành phố là 300/300). Đó cũng là lúc anh đã tự hỏi rằng liệu bản thân mình có thực sự hợp với môn học này.

Khi bước vào lớp 6, anh đã có cơ hội trở thành 1 trong 4 thành viên đội tuyển Việt Nam sang Hồng Kông giao lưu Toán học với bạn bè quốc tế qua kì thi Po Leung Kuk. Anh đã thấy mình thực sự trưởng thành hơn, bắt đầu tìm thấy và sống bằng chính mình trong thế giới của những bài toán, được thỏa sức sáng tạo và tự nghĩ ra những ý tưởng đột phá. Và hơn hết, anh đã được học hỏi, giao lưu với những người bạn đồng trang lứa từ các quốc gia khác nhau trên thế giới. Đây thực sự là quãng thời gian khó quên với anh, và cũng là quãng thời gian mở ra một hành trình đầy gian nan phía trước trên con đường chinh phục Toán học.

Những khó khăn ban đầu của người bước vào thế giới Toán học luôn là ý chí và sự kiên nhẫn đứng trước những bài toán khó, những bài đòi hỏi không chỉ kinh nghiệm, sự liên kết mạnh giữa các ý tưởng mà còn là sự sáng tạo không giới hạn. Thật may mắn khi anh đã luôn tin tưởng vào tình yêu và năng lực chính mình để rồi từ đó luôn chầm chậm, kiên trì cố gắng và có thể bước chân vào khối chuyên toán của ngôi trường anh đã luôn mơ ước-THPT Chuyên HN Amsterdam.

Trong một chuyến từ thiện tại làng Hữu Nghị, anh đã được chứng kiến nhiều em học sinh đặc biệt có hứng thú với những bài toán và những phép tính. Lúc đó anh mới nhận ra rằng có rất nhiều bạn học sinh luôn có trong mình sự tò mò về môn Toán nhưng điều kiện của họ đã không thể cho họ được cơ hội tốt nhất để "phá vỡ kén", thoát ra khỏi vùng tò mò bản thân để đến với đam mê. Dù ở đâu, anh tin rằng có một nguồn tham khảo, một tài liệu phù hợp sẽ tạo ra một sợi dây liên kết vô hình giữa những con người yêu toán, giúp các em cởi mở hơn để trao đổi và giúp đỡ lẫn nhau. Cuốn sách này anh viết không chỉ dành cho những em học sinh đã có sẵn tình yêu với môn Toán mà còn dành cho những em học sinh vẫn còn băn khoăn và muốn tìm hiểu hơn về bộ môn này. Những kì thi Toán quốc tế sẽ là những trải nhiệm, sẽ là những nền tảng vững trắc, là những nét bút bắt đầu cho sự say mê của em với môn học này.

Cuốn sách này gồm những tuyển tập những bài ôn tập cho 4 kì thi anh cho là nổi bật và đáng để trải nhiệm tham gia thi tại cấp THCS bao gồm: VMTC (MYTS) - AMC 8 - IMSO - IGO. Mỗi kì thi sẽ có những đề thi nhằm mục đích để các em biết được cấu trúc đề, dạng bài để ôn tập. Kèm với mỗi đề thi sẽ là những lời giải do anh tự làm và cả sưu tầm từ những nguồn nhằm giúp cho các em có những hướng nhìn đa chiều hơn về bài toán.

Anh tin rằng cuốn sách này sẽ không chỉ đồng hành cùng với các em trước mỗi kì thi, không chỉ khơi dậy ngọn lửa đam mê Toán học mà còn giúp các em có những góc nhìn, suy nghĩ khác nhau về hướng giải mỗi bài toán. Anh mong rằng với mỗi kì thi, giải thưởng, xếp hạng và huy chương chỉ là những thứ nhất thời. Thứ các em có được thực sự mà sẽ đi theo mãi với các em sau này sẽ là tư duy Toán học, là sự kiên trì không ngại khó khăn. Anh tin rằng những kì thi quốc tế này sẽ giúp cho các em nuôi dưỡng thêm tình yêu Toán học và không ngừng cố gắng!

Hà Nội, tháng 3 năm 2023
Phạm Hiển Vinh

1.2 Preface

Dear fellow students!

Unlike other students majoring in Mathematics, my starting point with this subject is quite late. As a student who has always dreamed of entering one of the most esteemed secondary schools in Hanoi, I had opportunities to enter the National Mathematical Violympic in primary school. However, in all 3 times, I only stopped at the district round as the highest score I could achieve was 260/300 (at that time, the minimum score to qualify for the next round was 300/300). That's when I wondered if I was really suitable for Math.

When I entered grade 6, I had the opportunity to become one of four members of the Vietnam team traveling to Hong Kong to participate in Po Leung Kuk, an international math competition where I could discuss Math and share experience with international students. I have found myself really more mature, started to find and live with myself in the world of math problems, unleash my creativity, and come up with breakthrough ideas by myself. And most importantly, I had the chance to learn and interact with foreign students from different nations around the world. It was the time that opened an arduous journey of conquering Math.

The initial difficulties for most people when they entered the magic world of Mathematics are always their will and patience towards facing difficult problems, which require not only experience, and strong connections between ideas but also unlimited creativity. It is so fortunate that I have always believed in my love and my ability, have persistently tried, and have been able to qualify for the Math honors class of my dream school, Hanoi Amsterdam High School for the Gifted.

During a charity trip to Huu Nghi village, I witnessed many students who were especially interested in math problems and calculations. It was then that I realized many students always had a curiosity about Math but their living standards and conditions did not offer them the opportunity to "break out of their cocoon", get out of the curiosity zone and come towards their passion. Wherever Math lovers live, I believe that having a reference source, and a suitable document will create an invisible bond between people who love math, helping you to be more open to sharing your experiences and helping each other. The book that I have written is not only for students who already have a love for Mathematics but also for students who are still wondering, or simply curious, and want to learn more about this subject. The international math competitions will be your experience, will be your solid foundation, and will be the beginning of your passion for this subject.

This book contains a selection of practice exercises for 4 exams that I consider outstanding and worth taking part in at the lower secondary level, including VMTC (MYTS) - AMC 8 - IMSO - IGO. Each exam will have questions for letting you know the structure and the format of the exam to review yourself. Attached to each exam question will be the solutions I made myself and collected from the sources to help you have a more multi-dimensional view of the problem.

I believe that this book will not only accompany you before each exam, not only ignite your passion for Mathematics but also help you have different perspectives and thoughts on how to solve each problem. I hope that each contest, awards, ratings, and medal are just temporary things and what you really achieve that will follow you forever will be your mathematical thinking, your perseverance and not being afraid of difficulties. I believe that these international competitions will help you nurture, and cultivate more love for Mathematics and never stop trying!

Hanoi, March 2023
Pham Hien Vinh

Mục lục

Chương 2

Vietnam mathematical talent challenge (VMTC):

2.1 Giới thiệu kì thi:

1) Với mục tiêu phát hiện và cổ vũ các năng khiếu toán học trong lứa tuổi học sinh và góp phần đẩy mạnh phong trào học toán ở các trường phổ thông, Hội Toán học Việt Nam tổ chức Cuộc thi Thách thức tài năng Toán học Việt Nam (Vietnam Mathematical Talent Challenge, viết tắt VMTC), trước được đặt tên là Mathematical Young Talent Search, viêt tắt MYTS. Cuộc thi VMTC sẽ được tổ chức thành hai vòng thi: vòng Sơ khảo và vòng Chung khảo, trong đó vòng Chung khảo dành cho tối đa 1/3 số thí sinh đạt kết quả cao nhất ở vòng Sơ khảo.

2) Vòng Sơ khảo sẽ được tổ chức đồng thời tại 5 địa điểm: Điểm 1: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Điểm 2: Trường Đại học Hải Phòng.

Điểm 3: Trường Đại học Vinh, Nghệ An.

Điểm 4: Trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

Điểm 5: Trường Đại học Sài Gòn, TP. Hồ Chí Minh.

Vòng Chung khảo sẽ được tổ chức đồng thời tại 2 địa điểm: Điểm 1: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Điểm 2: Trường Đại học Sài Gòn, TP. Hồ Chí Minh.

Lễ Tổng kết và Trao giải VMTC tổ chức ở Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh

2.2 Các đề ôn tập, đề mẫu:

2.2.1 Đề ôn tập số 1:

Câu 1 Cho dãy các số hữu tỉ dương x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{1}{9}$, $\dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{1}{7}$. Tính giá trị của $\dfrac{xyz}{zy+yz+zx}$.

Câu 2 Cho dãy vô hạn các chữ cái $VMTCVMTCVMTC...$, hãy tìm chữ cái thứ 2021.

Câu 3 Tìm 2 chữ số tận cùng trong biểu diễn thập phân của 61^{2021}

Câu 4 Cho các số thực x, y, z khác 0 thoải mãn điều kiện $(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z) \neq 0$ và $\dfrac{x}{y+z-100} = \dfrac{y}{x+z-100} = \dfrac{z}{x+y-100} = \dfrac{x+y+z}{2}$. Tìm z.

Câu 5 Xét 4 số nguyên dương phân biệt a, b, c, d không vượt quá 5. Tìm giá trị lớn nhất của $a^b - c^d$

Câu 6 Thống kê điểm thi học kì môn Toán của một tổ, cô giáo thấy có 1 điểm 10, 1 điểm 9, 1 điểm 8 và tất cả còn lại được 6. Biết điểm trung bình các tổ đó là 7. Hỏi tổ đó có bao nhiêu học sinh.

Câu 7 Tuấn đi từ nhà đến trường hết 40 phút, trong đó, 20 phút đầu đi với vận tốc $3km/h$, 20 phút sau đi với vận tốc $6km/h$. Hỏi nếu Tuấn đi với vận tốc $3km/h$ trên nửa quãng đường đầu và với vận tốc $6km/h$ trên nửa quãng đường sau thì thời gian đi là bao nhiêu phút?

Câu 8 Có bao nhiêu đường thẳng chia tam giác ABC cho trước thành 2 tam giác có chu vi bằng nhau?

Câu 9 Có bao nhiêu số hữu tỉ x mà số nguyên lớn nhất không vượt qua nó bằng $\dfrac{x+2020}{2021}$?

Câu 10 Tìm số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho cả 3 và 7, trong đó có 2 chữ số 3 còn lại tất cả đều là chữ số 7.

Câu 11 Một quán giải khát có 6 bình đựng nước hoa quả, trong đó có 1 bình nước Mơ, các bình còn lại đựng nước Dâu và nước Sấu. Thể tích nước hoa quả trong bình là 15l, 10l, 18l, 19l, 20l, 31l. Biết rằng số lít nước Dâu gấp đôi số lít nước sấu. Hỏi, quán đó có bao nhiêu lít nước mơ?

Câu 12 Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ và $AC = 8$. Trên cạnh BC lấy M và N sao cho $CM = 4$ và $BN = 2$. Tính số đo góc AMN.

Câu 13 Cho số nguyên dương b thỏa mãn $20^a = b^b$, với $a = 20^{21}$. Hỏi b có bao nhiêu ước nguyên dương?

Câu 14 Người ta đặt vào mỗi ô vuông màu xám của bảng 4x4 (như hình dưới), 0 hoặc 1 ngôi sao tằng hình, sao cho số ghi được ở mỗi ô màu trắng bằng tổng số ngôi sao được đặt vào các ô màu xám có chung cạnh hoặc đỉnh với ô màu trắng đó. Hỏi trong đó có bao nhiêu ngôi sao tàng hình?

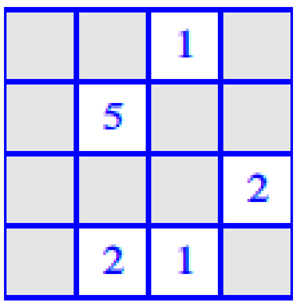


Figure. 2.1: Bảng 4x4

Câu 15 Một nhóm học sinh có tỷ số giữa học sinh nam và nữ là lớn hơn $\dfrac{7}{26}$ và nhỏ hơn $\dfrac{4}{13}$. Hỏi nhóm đó có ít nhất bao nhiêu học sinh?

Câu 16 Sắp xếp độ dài 4 cạnh và 1 đường chéo tứ giác theo thứ tự tăng dần, ta được dãy 3,4,6,9,14. Hỏi độ dài đường chéo là bao nhiêu?

Câu 17 Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn A,B,C,D,E thành 1 hàng dọc sao cho A và C đứng trước E, B đứng trước D?

Câu 18 Một lớp học có 40 học sinh giỏi Toán, 35 học sinh giỏi Lý, 35 học sinh giỏi Sinh và 45 học sinh giỏi tiếng Anh. Biết rằng có 5 học sinh giỏi cả 4 môn và mỗi em trong số học sinh còn lại đều giỏi đúng 3 môn. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh?

Câu 19 Cho hình vuông $ABCD$ mà trên cạnh AB có điểm E và trên cạnh BC có điểm F sao $AE = 3$, $CF = 5$ và $\angle CDF = \angle FDE$. Tính diện tích hình vuông đã cho.

Câu 20 Hà chọn 2 số nguyên dương, viết tổng bình phương 2 số đó lên bảng. Hà đưa tấm bảng đó cho Dương xem đố Dương đoán được 2 số đó. Dương bảo: "Tớ chịu, vì có nhiều cặp số có tổng bình phương bằng số của cậu." Hà trả lời: "Tớ cho cậu biết thêm tổng 2 số đó lớn hơn 10." Ngay sau đó Dương đoán đúng. Hỏi 2 số Hà chọn là 2 số nào?

2.2.2 Lời giải cho đề ôn tập số 1:

Câu 1 Ta có: $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{6}=>\dfrac{x+y}{xy}=6=>\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=6$. Tương tự, ta sẽ có: $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=9$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=6$. Suy ra $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$=11. Từ đó ta sẽ có giá trị biểu thức: $\dfrac{xyz}{zy+yz+zx}$=$\dfrac{1}{11}$. Đáp án: $\dfrac{1}{11}$

Câu 2 Dãy chữ cái vô hạn lặp lại chu kì 4 theo nhóm $[V,M,T,C]$. 2021 chia 4 dư 1 nên chữ cái thứ 2021 rơi vào vị trí thứ nhất của nhóm 4 hay đó là chữ V. Đáp án: V

Câu 3 Các số tận cùng là 1 nhân với nhau luôn tận cùng là 1. Tuy vậy để ý đề bài yêu cầu 2 chữ số tận cùng nên để ý rộng hơn ta thấy rằng 61^5 tận cùng 01 thỏa mãn thứ chúng ta đang cần. 2021 chia 5 dư 1, nên ta có: $61^{2021}=\overline{A01}.61=\overline{B61}$. Đáp số: 61

Câu 4 Ở đây, ta thấy một dãy các phân số bằng nhau, có thể nghĩ ngay đến việc sử dụng dãy tỉ số bằng nhau. Nếu $x+y+z=0$ thì ta sẽ có từ đề bài: $x,y,z=0$ dẫn đến mâu thuẫn đề bài. Khi $x+y+z\neq 0$ thì ta sẽ có:

$$\frac{x}{y+z-1000}=\frac{y}{z+x-1000}=\frac{z}{x+y+2021}=\frac{x+y+z}{(y+z-1000)+(z+x-1000)+(x+y+2021)}=\frac{1}{2}$$

Từ dãy tỉ số, ta sẽ có $2z=x+y+2021, x+y+z=1$. Hay $3z=2022$ hay $x=674$. Đáp số: 674.

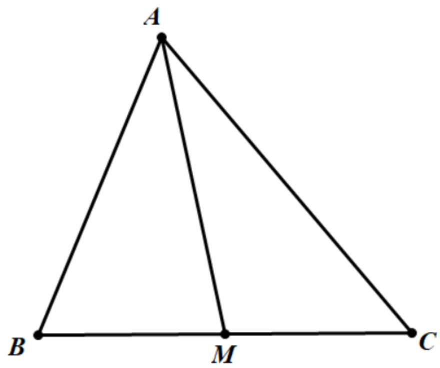
Câu 5 Cho a,b,c,d là các số phân biệt không vượt quá 5, nên để a^b-c^d lớn nhất thì a^b lớn nhất và c^d nhỏ nhất. Để ý $4^5>5^4$ nên để a^b lớn nhất thì $a=4, b=5$. Tương tự, để c^d nhỏ nhất thì $c=1 => c^d=1$. Vậy $a^b-c^d\leq 1024-1=1023$. Đáp số: 1023

Câu 6 Từ đề bài, có thể thấy rằng chúng ta đều biết hết số điểm của cả tổ. Vậy nên sẽ rất tự nhiên khi đặt số học sinh tổ đó là x. Điều kiện đề bài: x là số nguyên dương lớn hơn 3. Từ đề bài ta có: tổng số điểm cả tổ là: $10+9+8+6.(x-3)$. Vì điểm trung bình môn của cả tổ là 7 nên tổng số điểm cả tổ cũng là $7x$. Từ đó, ta sẽ có $9+6x=7x$ hay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện đề bài). Vậy có 9 học sinh trong tổ.

Câu 7 Đây là một bài toán đơn giản về vận tốc. Quãng đường nhà Tuấn đến trường là: $3.\dfrac{1}{3}+6.\dfrac{1}{3}=3(km)$. Nếu Tuấn đi nửa quãng đường đầu với vận tốc $3km/h$ và nửa sau với vận tốc $6km/h$ thì thời gian đi sẽ là: $\dfrac{1.5}{3}+\dfrac{1.5}{6}=0.75$ (giờ). Đổi đơn vị từ 0.75 giờ thành 45 phút. Đáp số: 45 phút.

Câu 9 Số nguyên lớn nhất không vượt qua x là $\dfrac{x+2020}{2021}$, từ đó ta có $\dfrac{x+2020}{2021}$ là số nguyên hay x là số nguyên. Từ đề bài, ta có: $x\leq\dfrac{x+2020}{2021}$ và vì x và $\dfrac{x+2020}{2021}$ đều là số nguyên nên $x=\dfrac{x+2020}{2021}$ hay x=1. Đáp số: 1

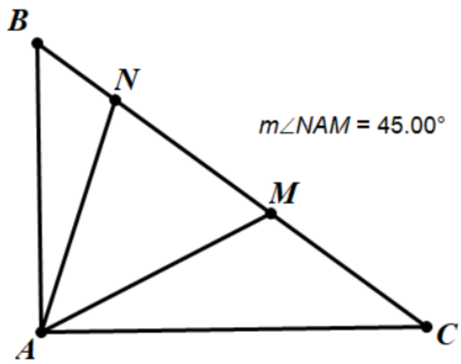
Câu 8 Chia một tam giác thành 2 tam giác cần 1 đường thẳng đi qua điểm và cắt cạnh đối diện của nó. Giả sử chúng ta xét tam giác ABC thỏa mãn điều kiện và xét đường thẳng d đi qua điểm A cắt cạnh BC. Khi đó tồn tại một điểm M thuộc cạnh BC thỏa mãn: $AB+BM$= $MC+CA$ (vì nếu chu vi tam giác ABC là k thì ta sẽ có: $k>\dfrac{k}{2}>\max(AB,BC,CA)$.)



Câu 10 Dấu hiệu nhận biệt của số chia hết cho 3 là tổng tất cả các chữ số của số đó chia hết 3. Mà trong số đó có 2 chữ số 3 => tổng tất cả các chữ số 7 chia hết cho 3 hay số chữ số 7 phải chia hết cho 3. Đề bài tìm số nguyên dương nhỏ nhất và số lượng số chữ số 7 phải lớn hơn hoặc bằng 3. Các số thỏa mãn là: $33777, 37377, 37737, 37773, ...$ Thử từ bé đến lớn, ta nhận thấy số thỏa mãn đề bài là: 37737. Đáp số là: 37737

Câu 11 Tổng các lít của cả 3 loại là: $15 + 10 + 18 + 19 + 20 + 31 = 113$. Gọi bình chứa lít nước Mơ có thể tích là x, bình chưa lít nước Sấu có thể tích là y và bình chưa lít nước Dâu là $2y$. Ta sẽ có: $x + 3y = 113$ => x chia 3 dư 2. Trong các số đề bài cho có 20 là số duy nhất chia 3 dư 2. Đáp số: 20.

Câu 12 Theo định lý Py-ta-go, ta sẽ thấy $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Do đó $MN = BC - BN - MC = 10 - 2 - 4 = 4$, $BM = 6, CM = 8$. Ta có thể thấy từ cách tính, tam giác MAB cân tại B, và tam giác CAN cân tại C. Đặt $\angle BMA = a$, $\angle CNA = b$, $\angle MAN = c$. Ta có: $\angle BAC = (a - c) + (b - c) + c = a + b - c =^\circ 90$ và trong tam giác MAN có $\angle MAN + \angle MNA + \angle AMN =\ ^\circ 180$ hay $a + b + c =\ ^\circ 180$. Từ đó ta tính được ra rằng $c =\ ^\circ 45$. Đáp số: $^\circ 45$.



Câu 13 Coi các hàng có tên lần lượt là $1, 2, 3, 4$ và các cột có tên lần lượt là a, b, c, d. Kí hiệu các ô và gọi tên là $a1, a2, ...$ Nếu $a1, a2, a3, b3, c3$ đều có ngôi sao tàng hình thì ta thấy ô $b3, c3$ đều liên kết với ô số 1 (vô lý). Vậy một trong hai ô $a2, b3$ phải có 1 ô có ngôi sao tàng hình. Do $b1, c2, d1, d2$ đều liên kết với ô số 1, mà $a2, b3$ phải có 1 ô có ngôi sao tàng hình nên hai ô d1 và d2 không có ngôi sao tàng hình. Do $b3, c3, d4$ đều liên kết với ô có số 1 nên trong ô c3, d4 có tối đa 1 ngôi sao tàng hình suy ra c2 là ô có ngôi sao tàng hình. Từ đó, b1,d1,d2 không có ngôi sao tàng hình. Từ đó c3,d4 có 1 ngôi sao tàng hình. Nếu đó là d4, c3 không có ngôi sao

và từ đó a1,a2,a3,b1,b3 (xung quanh ô có số 5) đều có ngôi sao (vô lý). Vậy c3 có ngôi sao và điền ô còn lại dễ dàng có a1,a2,a3 đều có bom.

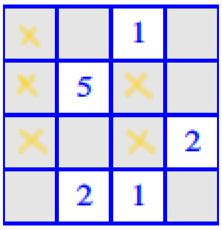
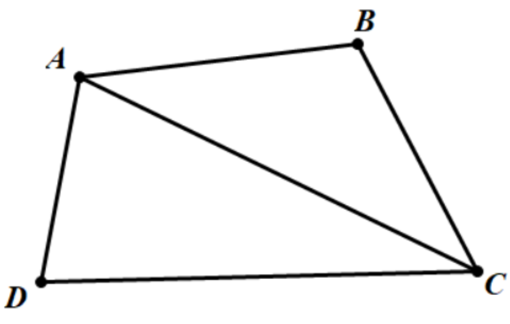


Figure. 2.2: Bảng 4x4

Câu 14 Nhận xét: 20 chỉ có 2 ước nguyên tố là 2 và 5 ($20 = 2^2.5$). Từ đó dễ thấy b cũng chỉ có 2 ước nguyên tố là 2 và 5. Đặt b=$2^x.5^y$, ta có: $b^b = (2^a.5^b)^{(2^a.5^b)}$. Lũy thừa của 2 trong 20^a là 2.20^{21} và lũy thừa của 2 trong b^b là $x.2^x.5^y$ do đó $2.20^{21} = x.2^x.5^y$. Tương tự: $20^{21} = y.2^x.5^y$ => $x = 2y$, thay vào tính được y=20, x=40. Vậy $b = 2^{40}.5^{20}$ hay số ước nguyên dương của b khi phân tích sẽ là $21.41 = 861$. Đáp số: 861

Câu 15 Ta có: $\frac{a}{b} < \frac{4}{13}$ => $4b > 13a > 12a$ => $b > 3a$. Xét $a = 1$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài, xét $a = 2$ khi đó $7 \leq b$. Thử lại thấy $a = 2$ và $b = 7$ thỏa mãn yêu cầu đề bài nên số học sinh ít nhất là 9 học sinh. Đáp số: 9

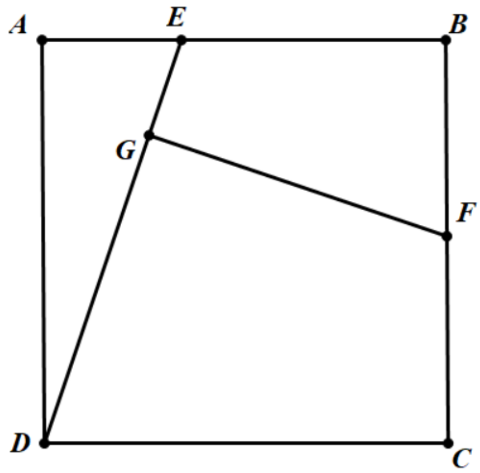
Câu 16 Giả sử tồn tại 1 tứ giác thỏa mãn đề bài là $ABCD$. Khi đó, không mất tính tổng quát, ta giả sử AC là đường chéo được xét đến. Nếu $AC = 14$ thì xét tam giác ABC có: $AB+BC > AC = 14$ nên AB,BC phải là 2 cạnh có độ dài là 6,9. Khi đó CD,AD có độ dài là 3,4 và $CD+AD > AC$ (mâu thuẫn). Nên một trong 4 cạnh AB,BC,CD,DA phải có 1 cạnh có độ dài là 14. Không mất tính tổng quát đó là CD. Ta có trong tam giác ACD có $AC + AD > CD$ nên $AC + AD > 14$. Nếu $AC < 5$ lại có $AD \leq 9$ khi đó $AC + AD < 14$ (mâu thuẫn) nên AC phải lớn hơn 6. AC hoặc là 6 hoặc là 9. Nếu $AC = 9$ thì ta có $AD + 9 > 14$ hay $AD > 5$ nên $AD = 6$. Khi đó AB, BC phải là 3,4 và theo bất đẳng thức cho tam giác ABC (mâu thuẫn). Vậy $AC = 6$. Đáp số: 6



Câu 17 Coi B và D là 1 người, khi đó B và D sẽ chiếm 2 vị trí trong 5 vị trí và số cách xếp để B đứng trước D là $\frac{4.5}{2} = 10$. Còn lại 3 vị trí cho A,C,E: số cách xếp để A,C đứng trước E là ACE và CAE. Nên tổng cách xếp là $10.2 = 20$ cách. Đáp số: 20

Câu 18 Bỏ 5 em giỏi cả 4 môn ra, ta sẽ còn lần lượt 35 em giỏi Toán, 30 em giỏi Lý, 30 em giỏi Sinh và 40 em giỏi Tiếng Anh. Mỗi em đều giỏi đúng 3 môn nên số em tổng cộng là $\frac{(35 + 30 + 30 + 40)}{3} = 45$ em. Cộng lại 5 em giỏi 4 môn là 50 em. Đáp số: 50 em.

Câu 19 Đặt cạnh hình vuông là a Hạ FG vuông góc ED, dễ thấy do DF là phân giác góc EDC nên tam giác FDC bằng tam giác FDG theo trường hợp cạnh huyền-góc nhọn. Từ đó ta có $DC = DG = a$. Theo pytago, ta lại có $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + 9}$ nên ta có $GE = a - \sqrt{a^2 + 9}$. Áp dụng định lý Pytago 2 lần nữa: ta sẽ thấy $GF^2 = EF^2 - GE^2 = DF^2 - DG^2$ nên ta sẽ có: $(a-3)^2 + (a-5)^2 - (a - \sqrt{a^2+9})^2 = a^2 + 25 - a^2 = 25 =>$ dễ tính được $a = \sqrt{55}$ hay diện tích hình vuông sẽ là 55. Đáp số: 55



Câu 20 Một số nhận xét như sau cho bài toán này: $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2 =>$ nếu a+b cố định là 1 số, thì $a^2 + b^2$ lớn nhất khi và chỉ khi $|a-b|$ lớn nhất. Theo như đề bài, ta sẽ chứng minh tồn tại số nguyên dương n và 2 cặp (a,b) và (x,y) thỏa mãn:

$$n = a^2 + b^2 = x^2 + y^2 \text{ và } a + b \leq 10 \text{ và } x + y > 10 \quad .$$

Khi đó, ta có $2n \leq 10^2 + (9-1)^2 = 164 => n \leq 82$. Lại có: $11 \leq x + y$ nên $2n > (x+y)^2 = 121 => n > 60$. Vì $2n < 164 => x + y < \sqrt{164} => x + y < 13 =>$ hoặc $x + y = 11$ hoặc $x + y = 12$. Lại có $121 > 2.x^2 => 8 \leq x$. Tương tự y nên ta sẽ có 3 cặp cho $x + y = 12$ và 3 cặp cho $x + y = 11$.

Nếu x,y có 1 số chia hết cho 5 thì n chia 5 dư 1 hoặc 4. Mà a^2, b^2 chia 5 dư 0,1,4 nên phải có 1 số chia hết cho 5. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là a $=> a = 5$ (mâu thuẫn tại khi đó $a + b \leq 10$ nên $n \leq 50$ (mâu thuẫn). Nếu cả x,y chia hết cho 2 vậy n chia hết cho 4. Tổng 2 số chính phương chia hết cho 4 dẫn đến 2 số chính phương đó chia hết cho 4 (bạn đọc tự chứng minh) hay khi đó a,b chia hết cho 2 $=> 6 \leq |a-b| => 2n \leq 100 + 36$ hay $n \leq 68$.

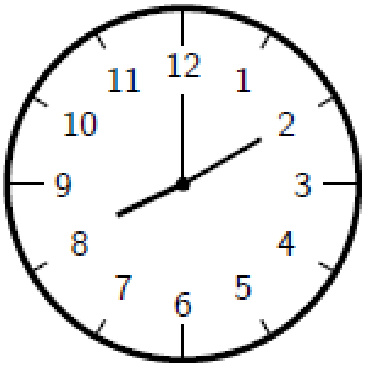
Trường hợp $(x, y) = (8, 3)$ nếu xét ra ta sẽ thấy không có cặp (a,b) nào thỏa mãn đề bài. Khi đó (7,4) là cặp duy nhất thỏa mãn đề bài và thử lại đúng. Đáp số: (7,4)

2.2.3 Đề ôn tập số 2:

Câu 1 Trong 1 ngày từ 9h sáng đến 9h tối có bao nhiêu lần kim giờ và kim phút cùng nằm trên cùng 1 đường thẳng,

Câu 2 Tính giá trị của biểu thức: $S = \frac{4}{1.3} + \frac{16}{3.5} + \frac{36}{5.7} + ... + \frac{2500}{49.51}$

Câu 3 Một chiếc đồng hồ có kim giờ, phút và giây. Hỏi tại thời điểm 8h10, trong các góc tạo bởi 2 kim đồng hồ thì góc có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

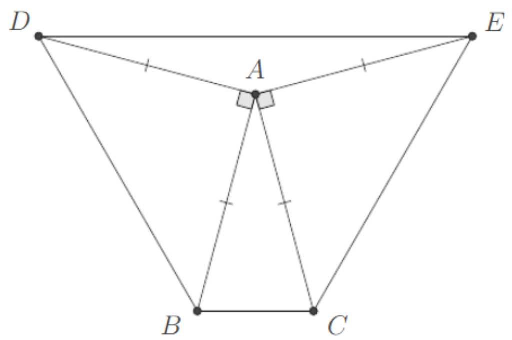


Câu 4 Hai người thợ An và Bình chia nhau một khoản tiền công. Sau khi nhận tiền,An nhận xét: "Nếu phần của mình được tăng thêm 6% thì phần của Bình sẽ bị giảm đi 5%". Hỏi nếu phần của Bình được tăng thêm 30% thì phần của An sẽ bị giảm đi bao nhiêu phần trăm?

Câu 5 Cho 10 số $a_1, a_2, ..., a_{10}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $\dfrac{a_1 - 1}{10} = \dfrac{a_2 - 2}{9} = ... = \dfrac{a_{10} - 10}{1}$ và $a_1 + a_2 = 41$. Tính S=$a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_9 - a_{10}$

Câu 6 Cho ba số x, y, z thỏa mãn: $\dfrac{x - 2y}{z - y} = -5$. Tính $\dfrac{x - 2z}{y - z}$

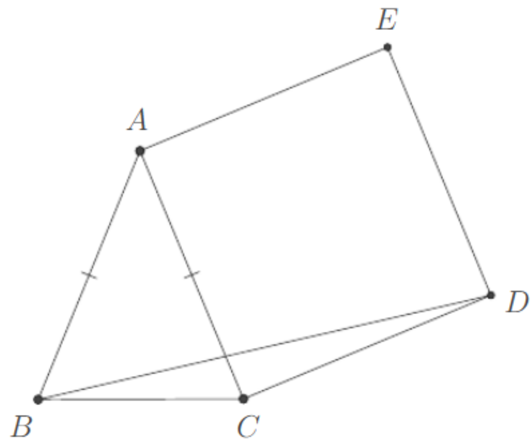
Câu 7 Trong hình vẽ bên, tam giác ABC có diện tích bằng 24 cm^2. Tính diện tích tam giác ADE.



Câu 8 Tìm các bộ số tự nhiên (x, y, z) thỏa mãn $x \leq y \leq z$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 34$.

Câu 9 Ban đầu trong mỗi ô vuông của bảng 4×4 có một con cào cào. Sau đó, vào cùng một lúc, tất cả các con cào cào đều nhảy sang ô vuông bên cạnh. Nhiều con cào cào có thể nhảy vào cùng một ô vuông. Hỏi sau khi nhảy, trong bảng có thể có nhiều nhất bao nhiêu ô vuông trống?

Câu 10 Cho tam giác ABC cân tại A, có $\angle A = ^\circ 45$ và $AB = 4$. Về phía ngoài tam giác dựng hình vuông $ACDE$ như hình vẽ dưới. Tính BD.



Câu 11 Hà đi bộ từ nhà ra chợ mất 20 phút; cũng đường đó, mẹ Hà đi mất 30 phút. Một hôm, mẹ đi chợ lúc 7h sáng; 5 phút sau, Hà cũng bắt đầu đi ra chợ. Hỏi Hà sẽ đuổi kịp mẹ vào lúc mấy giờ?

Câu 12 Viết lần lượt lên bảng bốn số có trung bình cộng bằng 20. Biết rằng trung bình cộng của ba số viết đầu là 23 và trung bình cộng của ba số viết cuối là 19. Hỏi trung bình cộng của số viết đầu và số viết cuối bằng bao nhiêu?

Câu 13 Trong các số tự nhiên từ 1 tới 2019, có bao nhiêu số chính phương không chia hết cho 3?

Câu 14 Trên bảng có một số tự nhiên có hai chữ số. Bạn An nói: "Đây là số chẵn nhưng không chia hết cho 4". Bạn Bình nói: "Đây là một số chính phương". Bạn Cường nói: "Số này là một lũy thừa của 3". Biết rằng có một bạn nói sai, hai bạn còn lại đúng. Hỏi số trên bảng là số nào?

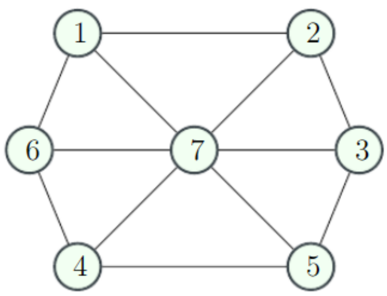
Câu 15 Trong các số tự nhiên có sáu chữ số $\overline{a2019b}$, tìm số lớn nhất là bội của 33.

Câu 16 Cho năm số tự nhiên không nhất thiết phân biệt. Biết rằng khi tính tổng của từng cặp hai số trong năm số này ta được các giá trị sau:

$$4, 5, 7, 7, 9, 9, 10, 11, 12, 14 .$$

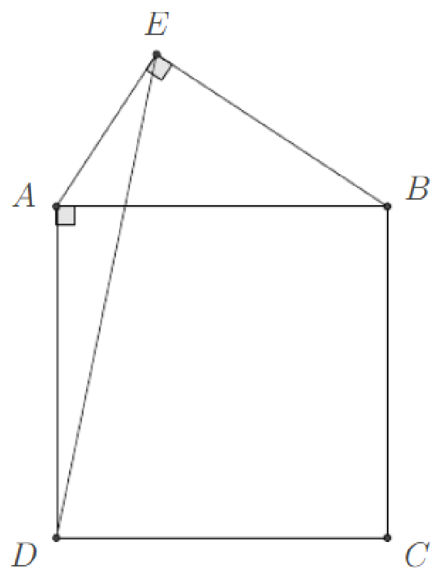
Hỏi tích 5 số đã cho là bao nhiêu?

Câu 17 Cho bảy thành phố và các con đường nối giữa chúng như ở hình vẽ bên. Hỏi từ thành phố số 1, có bao nhiêu cách điqua tất cả các thành phố còn lại, mỗi thành phố đi qua đúng một lần, rồi quay trở về nơi xuất phát?



Câu 18 Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho n vừa là tổng của năm số nguyên dương liên tiếp, vừa là tổng của bảy số nguyên dương liên tiếp, vừa là tổng của chín số nguyên dương liên tiếp.

Câu 19 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2 cm. Một điểm E thay đổi luôn nằm ngoài hình vuông, sao cho tam giác ABE vuông tại E. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng DE.



Câu 20 Trong một chiếc thùng có 20 quả bóng màu xanh, 20 quả bóng màu đỏ và 20 quả bóng màu vàng. Các quả bóng cùng màu được đánh số $1, 2, ..., 20$. Hỏi một người bị bịt mắt cần lấy ra ít nhất bao nhiêu quả để trong số bóng lấy ra chắc chắn có ba quả cùng màu và được đánh bởi ba số liên tiếp?

2.2.4 Lời giải cho đề ôn tập số 2:

.

Câu 1 Từ $9h$ sáng đến $12h$ sáng có 6 lần kim giờ và kim phút thẳng hàng với nhau. Từ 12h sáng đến 9 giờ tối có 8 khoảng thời gian mà kim giờ và kim phút 2 lần nên tổng số lần 2 kim thẳng hàng là: $8.2 + 6 = 22$ (lần). Đáp số: 22 lần

Câu 2 $S = (1 + \frac{1}{1.3}) + (1 + \frac{1}{3.5} + ... + (1 + \frac{1}{49.51})$
$= 25 + \frac{1}{2}.(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{49} - \frac{1}{51})$
$= 25 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{51}) = 25 + \frac{25}{51} = \frac{1300}{51}$

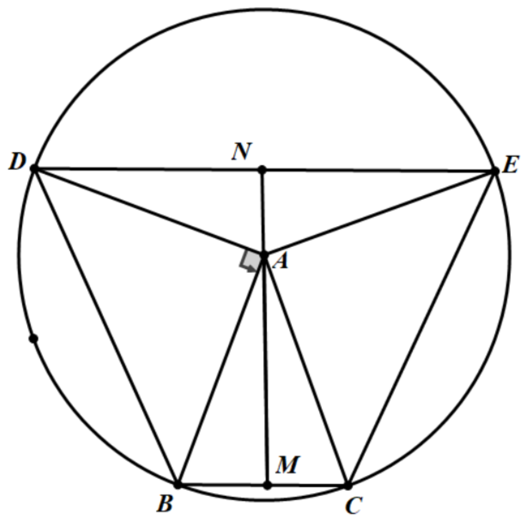
Câu 3 Vào lúc 8h10, chúng ta sẽ để ý góc giữa kim phút và kim giây sẽ chỉ đúng số 12 và số 2 nên góc tạo bởi 2 kim này sẽ là: $\frac{2}{12}.360 = {}^{\circ}60$. Mặt khác có thể để ý kim giờ chỉ sát số 8 nên góc tạo bởi kim giờ và kim giây sẽ xấp xỉ ${}^{\circ}120$. Do đó dễ thấy góc nhỏ nhất có giá trị ${}^{\circ}60$. Đáp số: 60

Câu 4 Gọi phần của bạn An là a, phần của bạn Bình là b. Ta có theo đề bài: $a + b = a.106\% + b.95\%$ $=> 5b = 6a$. Nếu Bình tăng lên 30% thì lúc đó khoản tiền công của Bình là $130\%.b$ hay $156\%.a$ mà $a + b = 220\%.a$ lúc đó khoản tiền của An chỉ còn lại $64\%.a$ hay An đã bị giảm đi 36%. Đáp số: 36

Câu 5 Áp dụng dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a_1 - 1}{10} = \frac{a_2 - 2}{9} = \frac{a_1 + a_2 - 3}{19} = 2$. Từ đó ta sẽ có $a_1 = 21, a_2 = 20, a_3 = 19, ..., a_{10} = 11$. Vậy biểu thức: $S = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$. Đáp số: 5

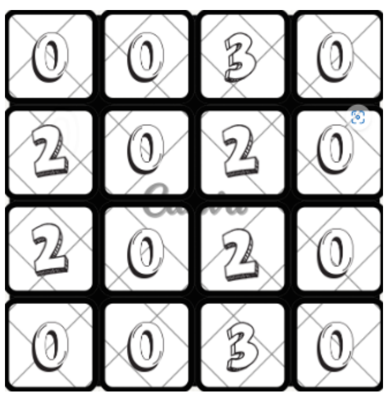
Câu 6 Từ giả thiết, nhân chéo ta sẽ được $x - 2y = 5y - 5z$ hay $x = 7y - 5z$ hay $x - 2z = 7(y - z)$ từ đó ta có được đáp án bài toán là 7. Đáp số: 7

Câu 7 Hạ AM vuông góc với BC, do tam giác ABC cân tại A nên AM vuông góc BC và M là trung điểm BC. Dễ thấy 2 tam giác $DAN = ABM$ theo trường hợp cạnh huyền-góc nhọn. Do đó diện tích tam giác DAE gấp đôi diện tích tam giác DAN và cũng gấp đôi diện tích tam giác BAM. Nói cách khác diện tích tam giác DAN sẽ là 24 cm^2. Đáp số: 24 cm^2

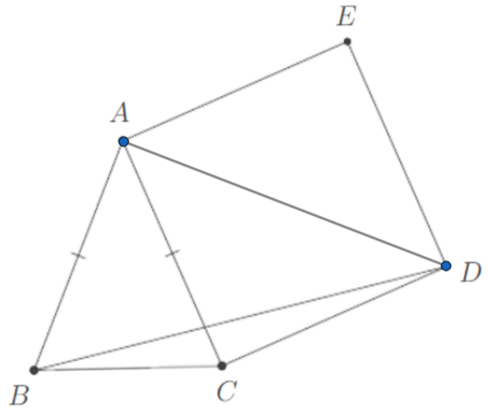


Câu 8 Nhận xét: $3x^2 \leq 34 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3.3z^2 => x^2 \leq 11 => x \leq 3$. $x = 0 =>$ thử ta sẽ được bộ (x,y,z) là (0,3,5). $x = 1$ và $x = 2$ không có nghiệm, $x = 3$ thu được một bộ khác là (3,3,4). Vậy có 2 bộ số thỏa mãn đề bài: (0,3,5),(3,3,4).

Câu 9 Đặt các hàng là 1,2,3,4 và các cột là A,B,C,D. Nhận xét: để tối ưu nhất thì 4 ô ở 4 góc bảng sau lần nhảy sẽ không còn con cào cào nào (vì đây là những ô tiếp xúc với các ô khác ít nhất). Xét con cào cào ở ô A3, A4 hoặc B3. Vì con cào cào ở ô A1 đã nhảy sang B1 nên trong 3 ô A2, A4,B3 có thêm 1 ô không có con nào nhảy. Tương tự khi xét D4, do đó có tối đa 10 ô trống $(16 - 4 - 2 = 10$ ô). Nếu giả sử số được điền trên các ô biểu hiện cho số con cào cào, ta sẽ điền như sau: Đáp số: 10 ô



Câu 10 Nối AD, ta có $\angle CAD = °45$. Lại có $\angle BAC = °45$ nên $\angle BAD = °90$. $AB = 4$ và $AD = 4\sqrt{2}$. Nên áp dụng định lý Pytago: ta sẽ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{48}$. Đáp số:$\sqrt{48}$



Câu 11 Gọi độ dài quãng đường từ nhà đến chợ là: a(km). Hà đi a km hết 20 phút, mẹ Hà đi hết 30 phút nên vận tốc Hà sẽ gấp $\frac{3}{2}$ lần vận tốc mẹ Hà. Khi mẹ Hà đi được 5 phút (hay đã đi được $a/6$). Vậy để Hà bắt kịp mẹ sẽ mất tổng thời gian là: $\frac{\frac{a}{6}}{\frac{a}{20} - \frac{a}{30}} = 10$ phút. Vậy Hà gặp mẹ lúc 7h15. Đáp số: 7h15

Câu 12 Gọi 4 số lần lượt là a,b,c,d. Ta có: $a + b + c + d = 80$, $a + b + c = 69$, $b + c + d = 57 =>$ $a + 2b + 2c + d = 126 => a + d = 80.2 - 126 = 34$ hay trung bình cộng là 17. Đáp số: 17

Câu 13 Ta có: $1 \leq x^2 \leq 2019 < 2025 = 45^2$ nên $1 \leq x \leq 44$. Số các số chia hết cho 3 từ 1 đến 44 là 14 số nên số số không chia hết cho 3 là 30 số. Đáp số: 30

Câu 14 Nếu An nói sai, số đó là một số chính phương lũy thừa của 3 và có 2 chữ số. Trong tất các các số chỉ có $3^4 = 81$ là số thỏa mãn. Nếu Bình nói sai thì số đó là số chẵn có 2 chữ số và là lũy thừa 3 (không có số nào thỏa mãn đề bài do chỉ có số lẻ mới là lũy thừa của 3). Nếu Cường nói sai thì đó là số chính phương chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4 (mâu thuẫn do các số chính phương chẵn đều chia hết cho 4) Vậy 81 là số duy nhất thỏa mãn đề bài. Đáp số: 81

Câu 15 Số đó là bội 33 nên tổng các chữ số chia hết cho 3. Do đó $a + b$ chia hết cho 3. Ngoài ra số đó chia hết cho 11 nên $|a + 9 - b - 3|$ chia hết 11 hay $|a - b + 6|$ chia hết cho 11. Các cặp $(a, b) = (9, 4), (8, 3)$ đều không chia hết cho 3 từ đó chọn $(a, b) = (7, 2)$ nên số lớn nhất là 720192. Đáp số: 720192

Câu 16 Gọi 5 số cần tìm là a,b,c,d,e theo thứ tự tăng dần. Ta có trong các cặp tổng 2 số từ 5 số, cặp nhỏ nhất có giá trị $a + b$, cặp lớn nhất có giá trị $c + d$. Tổng 5 số là: $(4 + 5 + 7 + 7 + 9 + 9 + 10 + 11 + 12 + 14)/4 = 22$. Từ đó, ta có $c = 4$. Lại có cặp số có giá trị nhỏ thứ nhì là $a + c$ nên từ đó ta có $a = 1$, $b = 3$, các cặp nhỏ thứ 3 và nhỏ thứ 4 chỉ có thể là $a + d$ hoặc $b + c$. Từ đó ta tính được nốt $d = 6$ và $e = 8$. Tích 5 số là: $1.3.4.6.8 = 576$. Đáp số: 576

Câu 17 Ta có thể dùng phương pháp liệt kê bằng cách vẽ các sơ đồ cây liên kết thể hiện đường đi từ 1 và quay trở lại 1. Đáp số: 12 cách

Câu 18 Ta có: $n = (a+1) + ... + (a+5) = (b+1) + ... + (b+7) = (c+1) + ... + (c+9)$ hay $n = 5a + 15 = 7b + 28 = 9c + 45$. Từ đó ta sẽ có n chia hết cho 5,7,9. Vậy n nhỏ nhất là 315.
Đáp số: 315

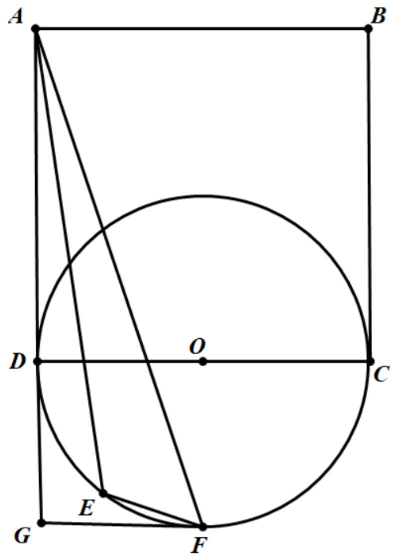
Câu 19 Lấy F là điểm chính giữa cung của đường tròn đường kính AB. Lấy điểm E bất kì trên cung AF. Ta sẽ chứng minh $DE \leq DF$ hay chứng minh tam giác DEF tù nếu E không trùng F. Thật vậy nếu kéo dài DA cắt đường thẳng qua F song song với AB tại G thì ta có tam giác DGF vuông tại G và E sẽ nằm trong tam giác DGF. Vì thế ta sẽ có:

$$\angle DEF = 180 - \angle EDF - \angle EFD > 180 - \angle FDG - \angle DFG = 90 .$$

Vì thế ta có tam giác DEF tù hay khi F là điểm chính giữa cung AB thì DF max. Theo định lý Pytago ta sẽ có:

$$DF = \sqrt{DG^2 + GF^2} = \sqrt{(DA + AG)^2 + AO^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} .$$

Đáp số: $\sqrt{10}$

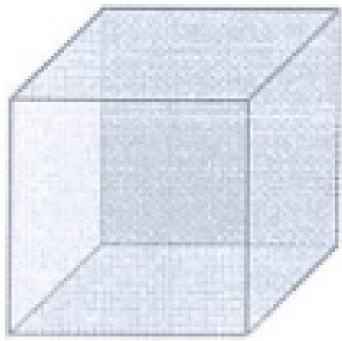


Câu 20 Nhận xét: Nếu có ít hơn hoặc bằng 42 quả thì ta xét trường hợp xấu nhất khi bốc không bốc được quả nào có số 3,6,9,... Khi có bốc nhiều hơn hoặc bằng 43 quả thì ta sẽ có 1 màu có nhiều hơn hoặc bằng 15 quả. Áp dụng phương pháp Dirichlet sẽ chắc chắn có 3 quả cùng màu và được đánh bởi 3 số liên tiếp.

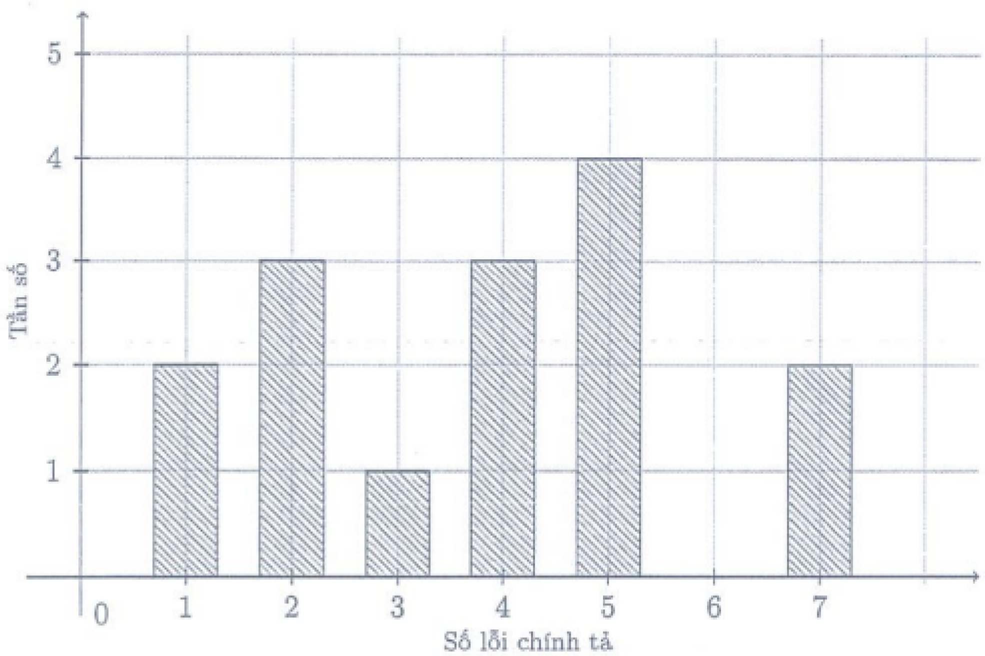
2.2.5 Đề ôn tập số 3:

Câu 1 Một cửa hàng nhập một loại áo phông với giá 200 ngàn đồng và niêm yết giá bán cao hơn 40% so với giá gốc. Sau một thời gian, vì không bán được áo nên cửa hàng quyết định giảm 25% giá niêm yết, bán hết sạch ngay lập tức. Hỏi sau khi bán hết áo đã nhập thì lợi nhuận thu được từ mỗi chiếc áo có giá bao nhiêu?

Câu 2 Có bao nhiêu tam giác đều có tất cả các đỉnh của một hình lập phương cho trước?



Câu 3 Dưới đây là biểu đồ số lỗi chính tả của một nhóm học sinh trong một kỳ thi viết tiếng Anh. Hỏi có bao nhiêu phần trăm học sinh của nhóm mắc ít hơn 4 lỗi ?



Câu 4 Cho $A = 2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - ... + 2^2 - 1$. Tìm 2 chữ số tận cùng A

Câu 5 Kỷ lục của kình ngư Ánh Viên tại Sea Game 28 trong cuộc thi 200m bơi tự do là 1 phút 59 giây. Biết rằng sau khi nhảy xuất phát, vận tốc bơi của Ánh Viên giữ ổn định ở mức 1,6m/giây, hỏi Ánh Viên nhảy xuất phát xa bao nhiêu mét (coi như không tính thời gian nhảy xuất phát)?

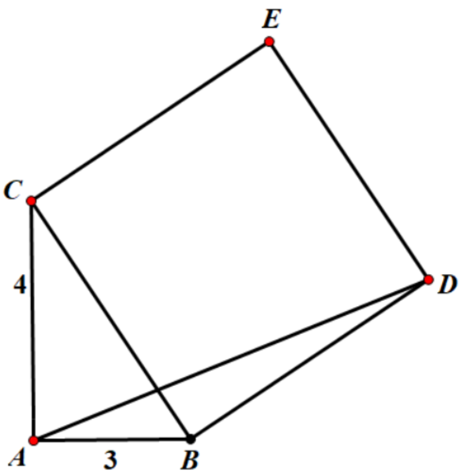
Câu 6 Có bao nhiêu số nguyên dương n mà khi chia n cho 45 thì có phần dư đúng bằng bình phương của thương?

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
... ...

Câu 7 Các số lẻ được xếp thành hàng như sau. Hỏi tổng các số hàng 20 là bao nhiêu?

Câu 8 Hai cầu thủ Xuân Trường và Văn Thanh cùng nhau tập sút phạt đền, mỗi người sút ít nhất một lần. Giả sử tỷ lệ sút thành công của Xuân Trường là 80% và của Văn Thanh là 95%. Hỏi tổng số lần sút thành công của cả hai cầu thủ nhiều nhất có thể là bao nhiêu, nếu họ sút tổng cộng 125 lần?

Câu 9 Cho tam giác ABC vuông tại A,$AB = 3cm$ và $AC = 4cm$. Dựng ra phía ngoài tam giác hình vuông BCED (xem hình vẽ). Tính độ dài đoạn thẳng AD.

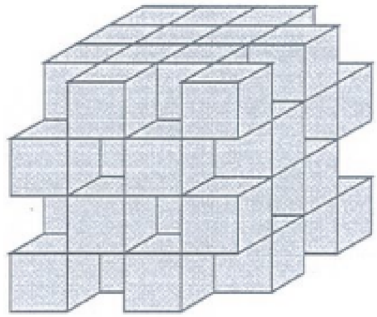


Câu 10 Bạn An có 13 tấm thẻ được ghi các số từ 1 đến 13. Hỏi An có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu thẻ để tích các số trên các tấm thẻ được chọn là một số chính phương?

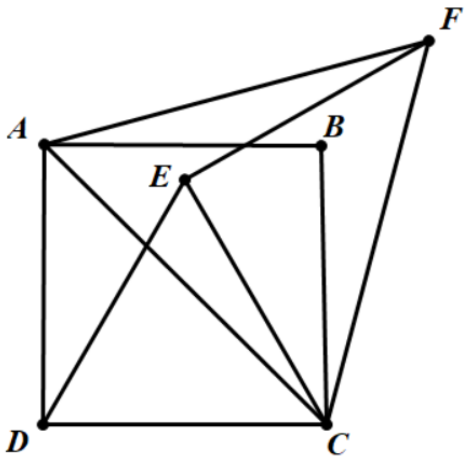
Câu 11 Một nhóm bạn đến từ ba trường rủ nhau đi câu cá, số bạn từ mỗi trường đều bằng nhau. Cuối buổi câu cá, bạn câu được ít cá nhất câu được $\frac{1}{15}$ tổng số cá, bạn câu được nhiều cá nhất câu được $\frac{1}{9}$ tổng số cá. Hỏi nhóm này có bao nhiêu bạn?

Câu 12 Bạn Châu ghép 64 khối lập phương cạnh 1, để tạo thành khối lập phương cạnh 4. Sau đó, Châu lại gỡ đi 14 khối lập phương nhỏ như trong hình bên. Tính diện tích bề mặt của khối được tạo thành?

Câu 13 Bốn bạn nhỏ An, Bình, Lan, Hoa, hát và đệm đàn cho nhau. Với mỗi bài, có một bạn đánh đàn và ba bạn kia hát. Biết rằng, An đã hát 9 bài, Bình đã hát 5 bài, Lan đã hát 6 bài và Hoa đã hát 7 bài. Hỏi Bình đã đệm đàn cho mấy bài hát?



Câu 14 Cho hình vuông ABCD. Dựng hai tam giác đều ABE và BDF như hình bên. Tính góc EFD.



Câu 15 Hỏi có bao nhiêu cách nhốt 5 con vật, gồm hổ, báo, sư tử, gấu và mèo rừng, vào 5 chuồng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 sao cho mỗi con được nhốt vào một chuồng và hổ không ở chuồng 1, báo không ở chuồng 5?

Câu 16 Một vận động viên điền kinh luyện tập 9 ngày liên tục để chuẩn bị thi đấu. Biết rằng trong bất kỳ bốn ngày liên tiếp nào vận động viên cũng chạy được tổng cộng 87 km; trong ngày thứ 2 và ngày cuối cùng vận động viên chạy lần lượt là 22km và 19 km. Hỏi trong hai ngày thứ 3 và thứ 8 vận động viên chạy tổng cộng bao nhiêu km?

Câu 17 Có bốn trang trại nuôi bò A, B, C, D, theo thứ tự đó nằm trên một trục giao thông. Khoảng cách từ trang trại A tới các trang trại B, C, D lần lượt là 2km, 5km, 6km. Người ta xây một nhà máy chế biến sữa nằm trên trục giao thông đó sao cho tổng các quãng đường từ nhà máy tới hai trang trại A, B bằng tổng các quãng đường từ nhà máy tới hai trang trại còn lại. Hỏi nhà máy xây cách trang trại A bao nhiêu km? (Coi trục giao thông là một đường thẳng)

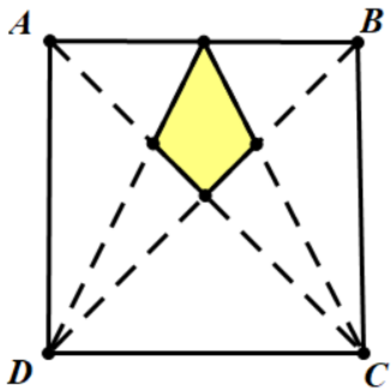
Câu 18 Một người đang đi xe máy trên đường quốc lộ thì thấy một xe ô tô vượt lên. Sau 10 phút, đến trạm nghỉ, người đi xe máy thấy xe ô tô đã dừng ở đó. Biết rằng vận tốc của xe máy là 40 km/h và của xe ô tô là 50 km/h. Hỏi xe ô tô đến trạm nghỉ trước xe máy bao nhiêu phút?

Câu 19 Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho N chia hết cho 99 và trong biểu diễn thập phân của N không chứa chữ số 9.

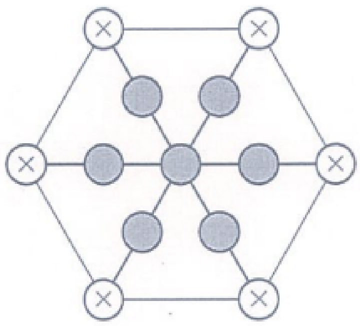
Câu 20 Xét các số thực a,b,c thỏa mãn: $|a| \leq 5$, $|b+1| \leq 7$ và $|c+2| \leq 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất S và giá trị lớn nhất T của $|a+b-c|$.

Câu 21 Tìm số nguyên tố nhỏ nhất có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho cả sáu số a, $\overline{ab}$, $\overline{abc}$, c, $\overline{cb}$ và $\overline{cba}$ đều là các số nguyên tố.

Câu 22 Gọi E là trung điểm cạnh CD của hình vuông ABCD. Biết diện tích hình vuông bằng 144 cm^2. Tính diện tích phần tô đậm.



Câu 23 Cho 13 hình tròn được sắp xếp thành 3 hàng, mỗi hàng có 5 hình, như hình bên. Điền 13 số nguyên dương đầu tiên vào 13 hình tròn đó sao cho mỗi hình tròn chỉ chứa đúng một số và tổng của 5 số ở mỗi hàng bằng tổng của 7 số nằm ở 7 hình tròn tô đậm. Tìm giá trị lớn nhất có thể của tổng 6 số được điền ở 6 hình tròn có đánh dấu X.



Câu 24 Trong một buổi tiệc, ngoại trừ Hà, hai người bất kỳ đều bắt tay nhau. Hà chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng mỗi cặp hai người chỉ bắt tay nhau không quá một lần và có tổng cộng 420 lần bắt tay. Hỏi Hà có bao nhiêu người quen trong buổi tiệc?

2.2.6 Lời giải cho đề ôn tập số 3:

.

Câu 1 Giá niêm yết của cái áo là: 200.140%= 280 ngàn đồng. Sau khi giảm thì giá sẽ còn lại là: 280.75%= 210 ngàn đồng. Do đó mỗi cái áo lãi 10 ngàn đồng. Đáp số: 10 ngàn đồng.

Câu 2 Mỗi đỉnh của hình đã cho có thể kết nối các đỉnh khác để tạo được 3 tam giác đều. có 8 đỉnh nên có 24 tam giác đều được tạo. Mỗi lần tính như vậy có 3 tam giác đều bị lặp nên có $24/3 = 8$ tam giác khác nhau. Đáp số: 8 tam giác đều.

Câu 3 Từ bảng thống kê, ta thấy có 15 học sinh trong đó có 6 học sinh mắc ít hơn 4 lỗi hay 40% mắc ít hơn 4 lỗi. Đáp số: 40%

Câu 4 Nhận xét: $(n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1$. Do đó nếu ghép cặp tương tự ta sẽ có: $A = 2018 + 2017 + ... + 1 = \dfrac{2019.2018}{2} = 2037171$. Do đó A tận cùng bởi 71.

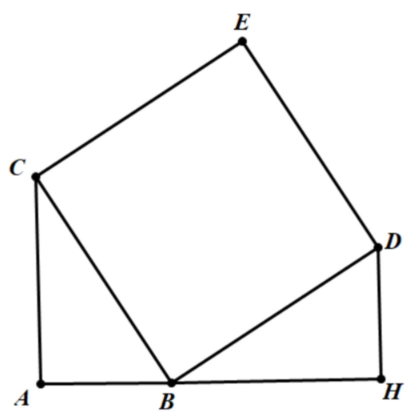
Câu 5 1 phút 59 giây quy đổi thành 119 giây. Vậy Ánh Viên đã bơi: $119.1,6 = 190.4$m. Vậy Ánh Viên đã nhảy: $200 - 190.4 = 9.6$m. Đáp số: 9.6m

Câu 6 Xét các số ở đầu hàng, chúng ta sẽ nhận ra quy luật rằng số đứng đầu hàng thứ n sẽ có dạng là: $1 + 2 + ... + 2(n-1)$ hay sẽ có dạng là: $1 + (n-1).n$. Số đứng đầu hàng thứ 20 sẽ là 381. Vậy tổng các số hàng thứ 20 sẽ là: $\dfrac{(381 + 381 + 19.2).20}{2}$=8000. Đáp số: 8000.

Câu 7 Đặt $n = 45.a^2 + a$ trong đó a nguyên dương. Vì a^2 là thương phép chia nên $a^2 < 45$ hay $a < 7$. Vì a nguyên dương nên có 6 giá trị a thỏa mãn, mỗi giá trị a tương ứng 1 giá trị n. Đáp số: 6

Câu 8 Gọi số lần sút Xuân Trường là a, khi đó số lần sút Văn Thanh là: $125 - a$. Ta có tổng số lần sút thành công 2 người sẽ là: $a.\dfrac{4}{5} + (125-a).\dfrac{19}{20} = \dfrac{125.19 - 3a}{20}$.Số này lớn nhất khi a nhỏ nhất và nhận xét a chia hết cho 5 vì số cần tìm là số nguyên dương. Chọn $a = 5$ thỏa mãn và lúc đó họ sút tổng cộng 118 lần. Đáp số: 118 lần.

Câu 9 Từ D hạ DH vuông góc với AB, ta có $BD = BC$, lại có $\angle DBA = 180 - \angle CBA - 90 = \angle ACB$. Do đó tam giác BDH bằng tam giác CBA theo trường hợp cạnh huyền-góc nhọn. Do đó $DH = 3, AH = 7 => AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{58}$. Đáp số: $\sqrt{58}$



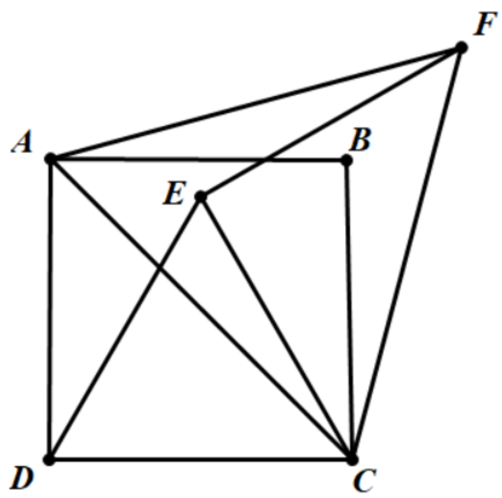
Câu 10 Các số không thể chọn bao gồm: 7,11,13. Vì những số này là các số nguyên tố và trong khoảng từ 1 đến 13 không còn số nào khác có ước là 7,11,13. Tích các số còn lại khi phân tích ra thừa số nguyên tố sẽ là: $2^{10}.3^5.5^2$. Do đó nếu không bốc bài số 3, ta sẽ có 1 số chính phương. Đáp số: 9 tấm.

Câu 11 Do bạn câu nhiều nhất được $\frac{1}{9}$ tổng số cá nên số bạn phải lớn hơn 9. Tương tự, số bạn phải nhỏ hơn 15. Mà số bạn chia hết cho 3 nên sẽ có 12 bạn. Đáp số: 12 bạn

Câu 12 Mỗi ô không nằm trong cạnh khi tháo ra sẽ tăng diện tích lên 4 đơn vị. Mỗi ô ở cạnh mà không ở góc khi bị tháo ra tăng lên 2 đơn vị. Mỗi ô ở góc khi tháo ra sẽ không làm tăng lên diện tích của bề mặt. Vậy diện tích của tổng bề mặt sau khi đếm là: $16.6 + 4.6 + 2.3 = 126$. Đáp số: 126

Câu 13 Ta thấy mỗi bài, có 1 bạn đệm đàn và 3 bạn còn lại sẽ hát nên Bình sẽ đệm đàn cho: $\frac{9+5+6+7}{3} - 5 = 4$ bài. Đáp số: 4 bài

Câu 14 Do EAB là tam giác đều nên E thuộc trung trực AB và từ đó sẽ có E thuộc trung trực CD hay $EC = ED$.Ta có thể thấy $\angle EBF = 60 - \angle EBD = \angle EBD = 45$ lại có $EB = AB$ và $FB = DB$ nên tam giác EBF bằng tam giác ABD theo trường hợp c-g-c. Do đó $\angle EFB = \angle ADB = 45$ nên $\angle DFE = 15$. Đáp số: 15



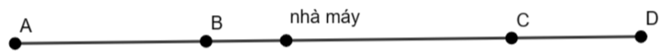
Câu 15 Chúng ta sẽ dùng phương pháp đến kết hợp với nguyên lý bù trừ để giải bài này. Có 5! cách sắp xếp 5 con vào chuồng. Ta sẽ tìm số cách không thỏa mãn đề bài: Có 4! cách mà hổ ở chuồng 1, báo không ở chuồng 5 và ngược lại. Có 3! cách mà cả hổ cả báo ở chuồng 1 và 5. Nên sẽ có tổng cộng: $120 - 4!.2 + 3! = 78$ cách. Đáp số: 78 cách.

Câu 16 Gọi độ dài quãng đường vận động viên đó chạy trong 9 ngày lần lượt là: $a_1, a_2, .., a_9$. Khi đó ta có:

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} = 87$$

với i chạy từ 1 đến 6. Từ đó ta sẽ có: $a_1 = a_5 = 19, a_2 = a_6 = 22, a_5 = a_9 = 19, a_3 = a_7, a_4 = a_8$. Từ đó cộng hết lại ta sẽ có: $a_3 + a_8 = \frac{87.3 - (19+22).3}{3} = 46$. Đáp số: 46

Câu 17 Vì tổng quãng đường từ nhà máy chế biến sữa đến A,B bằng tổng quãng đường từ nhà máy đến C,D nên nhà máy phải đặt giữa B và C. Từ đó gọi khoảng cách từ nhà máy đến B là x, ta sẽ có: $x + x + 2 = 3 - x + 3 - x + 1$ hay $x = \frac{5}{4}$=> khoảng cách của nhà máy đến trang trại A sẽ là 3.25 km. Đáp số: 3.25 km



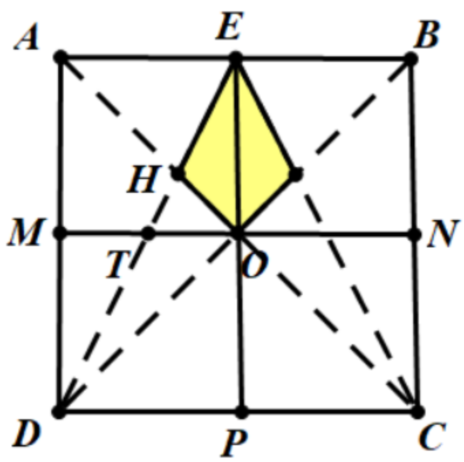
Câu 18 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ. Xe ô tô đã đi hơn xe máy: $(50 - 40).\frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ km. Do đó sẽ đến trạm nghỉ trước xe máy: $\frac{\frac{5}{3}}{50} = \frac{1}{30}$ giờ hay sẽ là 2 phút. Đáp số: 2 phút.

Câu 19 Nhận xét các số chia cho 99 nhận thương là $1, 2, ..., 11$ đều có chữ số 9 trong đó bao gồm: (99,198,297,396,495,594,693,792,891,990,1089). Ta thử số 12 được 1188 là số không có chữ số 9. Đáp số: 1188

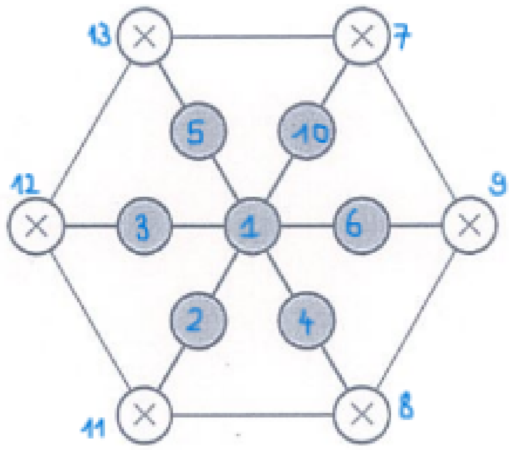
Câu 20 $|a| < 5$ nên ta có: $-5 \leq a \leq 5$. Tương tự ta sẽ có: $-8 \leq b \leq 6$ và $-11 \leq c \leq 7$. Do đó $-20 \leq a + b - c \leq 22$. Nên giá trị lớn nhất biểu thức $T = |a + b - c|$ là 22. Đáp số: 22

Câu 21 Lần lượt thử các số a thỏa mãn, ta loại đi những trường hợp mà không thỏa mãn với c. Đến cuối ta nhận ra chỉ có số 313 là số duy nhất thỏa mãn đề bài. Đáp số: 313.

Câu 22 Chia hình vuông thành 4 phần bằng nhau và đặt tên đỉnh như hình vẽ ta sẽ thu được:
EA đi qua trung điểm MO hay từ đó ta có $S\triangle DEH = 4S\triangle THO$.
Đặt $S\triangle THO = a$, $S\triangle EHO = b$
=> ta có: $a + b = 9$ và $4a + b = 18$ => $a = 3, b = 6$. Vậy $S\triangle EHO = 6$
Do đó diện tích tô đậm là: $12cm^2$. Đáp số: $12cm^2$



Câu 23 Bạn đọc tự giải. Hướng giải: Đặt ẩn phụ của các ô vuông, sử dụng để bài để liên kết các ẩn với nhau.



Câu 24 Gọi n là số người ở bữa tiệc. Số cái bắt tay trong bữa tiệc sẽ là: $\dfrac{n.(n-1)}{2}$. Vì Hà chỉ bắt tay với những người mình quen mà có 420 cái bắt tay nên ta có:

$$\frac{n(n-1)}{2} > 420$$

hay $n > 29$. Từ đó ta sẽ có: $30 \le n$. Nếu có 30 người trong bữa tiệc thì số cái bắt tay của mọi người sẽ là $\dfrac{29.28}{2} = 406$ cái. Vậy còn lại sẽ còn 14 cái bắt tay hay đây cũng chính là số người mà Hà quen. Đáp số: 14.

Chương 3

American Mathematics Competitions (AMC):

3.1 Giới thiệu kì thi:

3.1.1 Mục đích:

Kỳ thi Toán học Hoa Kỳ là kì thi toán quốc tế uy tín, chất lượng, được xem là sân chơi toán học hàng đầu hiện nay. Mục tiêu quan trọng nhất của kì thi là tạo cơ hội cho các thí sinh được làm quen với những dạng toán có chiều sâu trong chương trình giáo dục phổ thông, với nhiều câu hỏi liên quan tới các ứng dụng toán học trong thực tế. Mỗi năm, cuộc thi thu hút 350.000 thí sinh đến từ hàng nghìn trường của các quốc gia trên thế giới tham gia. Các bài thi sẽ có mức độ khó tăng dần dành cho học sinh THCS và THPT. Học sinh THCS có thể dự thi AMC 8 (được dành cho học sinh có trình độ từ lớp 8 trở xuống).

3.1.2 Lịch sử kì thi:

Kỳ thi Học sinh giỏi Toán học Hoa Kỳ (American Mathematics Competitions - AMC) là kỳ thi có lịch sử lâu đời được tổ chức bởi Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ (Mathematical Association of America) ra đời từ năm 1954. Từ đó đến nay kì thi được tổ chức tại nhiều quốc gia, đại diện chính thức của Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ sẽ phụ trách tổ chức kì thi.

3.1.3 Các thí sinh hợp lệ:

Cấu trúc đề thi được chia thành 3 trình độ: AMC 8 (dành cho học sinh có trình độ lớp 8 trở xuống); AMC 10 dành cho học sinh có trình độ lớp 10 trở xuống; AMC 12 dành cho học sinh có trình độ từ lớp 12 trở xuống).

3.1.4 Đề thi và bài làm:

Đề thi trình độ AMC 8 (cấp THCS) được đưa ra dưới dạng trắc nghiệm, gồm 25 câu hỏi trắc nghiệm với độ dài 40 phút. Với mỗi câu hỏi có 5 phương án và chỉ có duy nhất một đáp án là chính xác. Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ biên soạn và cung cấp đề thi bằng Tiếng Anh cho các quốc gia. BTC tại Việt Nam sẽ tiến hành dịch đề thi ra Tiếng Việt. Các thí sinh sẽ được cung cấp đề thi song ngữ Anh

– Việt.

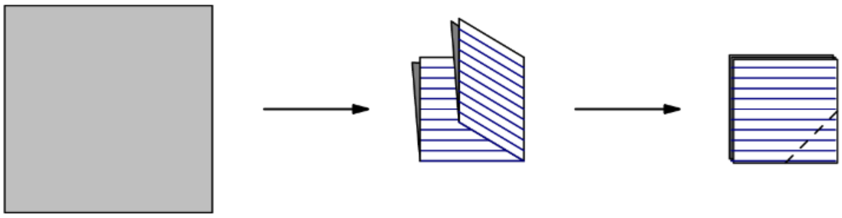
3.2 Các đề ôn tập:

3.2.1 Đề ôn tập số 1:

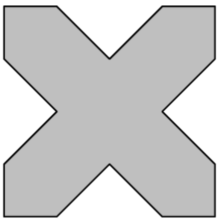
Câu 1 What is the value of $(8 \times 4 + 2) - (8 + 4 \times 2)$?

(A) 0 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 18 **(E)** 24

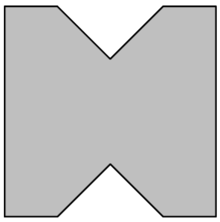
Câu 2 A square piece of paper is folded twice into four equal quarters, as shown below, then cut along the dashed line. When unfolded, the paper will match which of the following figures?



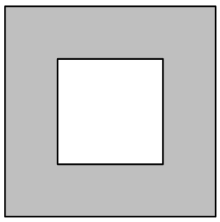
(A)



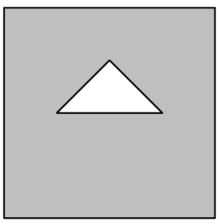
(B)



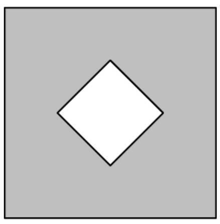
(C)



(D)



(E)



Câu 3 Wind chill is a measure of how cold people feel when exposed to wind outside. A good estimate for wind chill can be found using this calculation

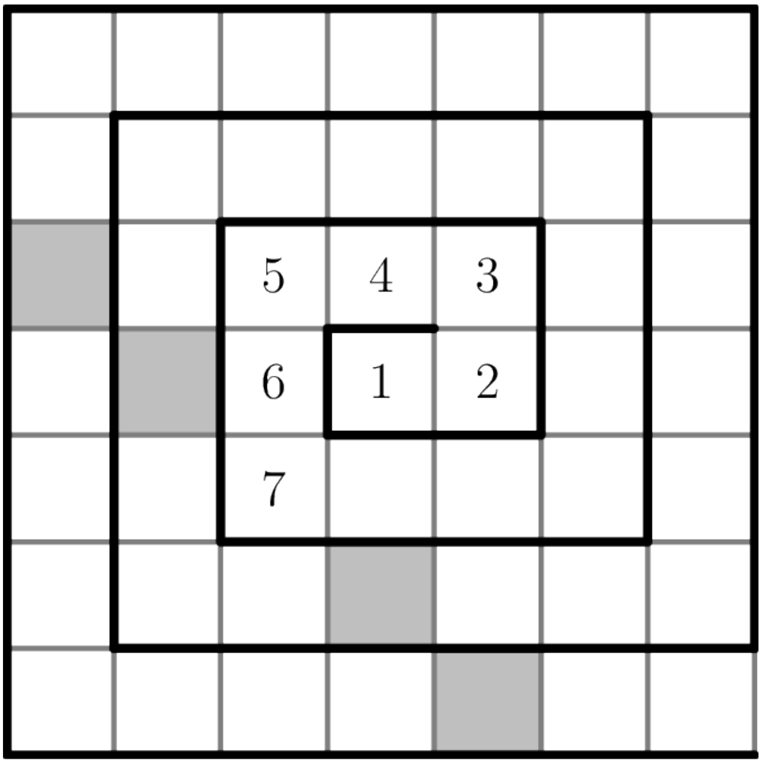
$$(\text{wind chill}) = (\text{air temperature}) - 0.7.\ (\text{wind speed})$$

where temperature is measured in degrees Fahrenheit (°F) and the wind speed is measured in miles per hour (mph). Suppose the air temperature is 36°F and the wind speed is 18 mph. Which of the following is closest to the approximate wind chill?

(A) 18 **(B)** 23 **(C)** 28 **(D)** 32 **(E)** 35

Câu 4 The numbers from 1 to 49 are arranged in a spiral pattern on a square grid, beginning at the center. The first few numbers have been entered into the grid below. Consider the four numbers that will appear in the shaded squares, on the same diagonal as the number 7. How many of these four numbers are prime?

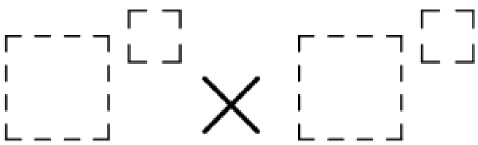
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4



Câu 5 A lake contains 250 trout, along with a variety of other fish. When a marine biologist catches and releases a sample of 180 fish from the lake, 30 are identified as trout. Assume that the ratio of trout to the total number of fish is the same in both the sample and the lake. How many fish are there in the lake?

(A) 1250 **(B)** 1500 **(C)** 1750 **(D)** 1800 **(E)** 2000

Câu 6 The digits $2, 0, 2$, and 3 are placed in the expression below, one digit per box. What is the maximum possible value of the expression?



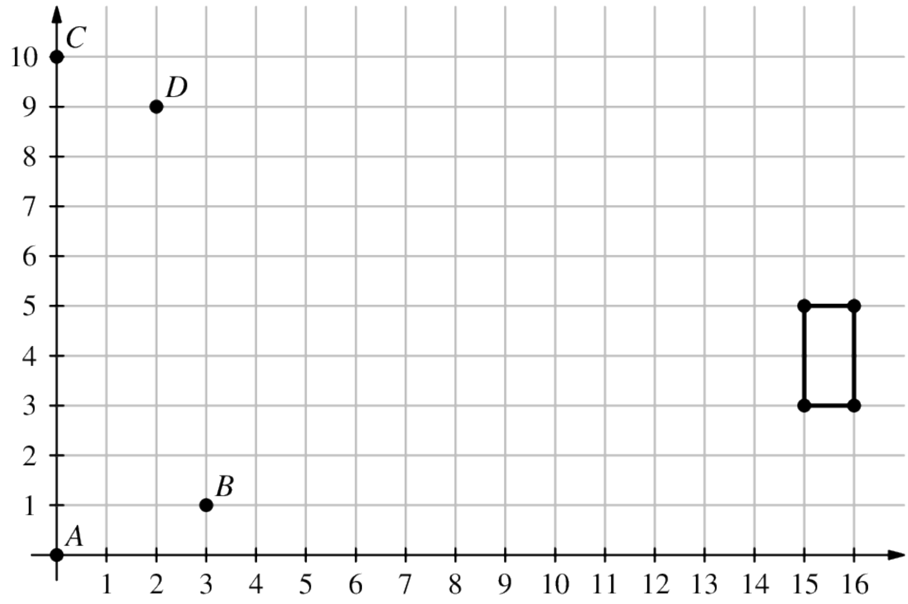
(A) 0 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 16 **(E)** 18

Câu 7 A rectangle, with sides parallel to the x-axis and y-axis, has opposite vertices located at $(15, 3)$ and $(16, 5)$. A line drawn through points $A(0, 0)$ and $B(3, 1)$. Another line is drawn through points $C(0, 10)$ and $D(2, 9)$. How many points on the rectangle lie on at least one of the two lines?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

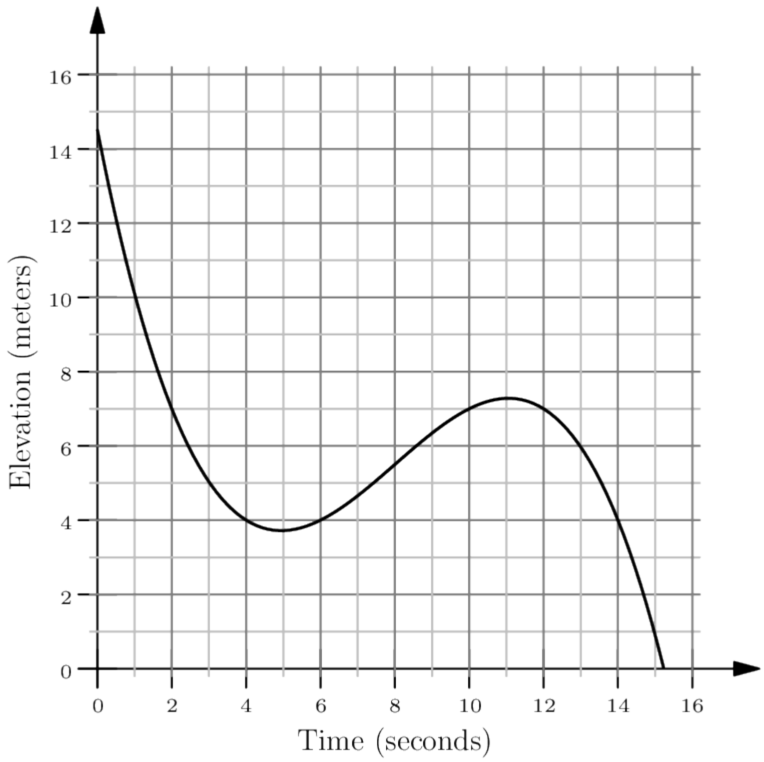
Câu 8 Lola, Lolo, Tiya, and Tiyo participated in a ping pong tournament. Each player competed against each of the other three players exactly twice. Shown below are the win-loss records for the players. The numbers 1 and 0 represent a win or loss, respectively. For example, Lola won five matches and lost the fourth match. What was Tiyo's win-loss record?

(A) 000101 **(B)** 001001 **(C)** 010000 **(D)** 010101 **(E)** 011000



Player	Result
Lola	111011
Lolo	101010
Tiya	010100
Tiyo	??????

Câu 9 Malaika is skiing on a mountain. The graph below shows her elevation, in meters, above the base of the mountain as she skis along a trail. In total, how many seconds does she spend at an elevation between 4 and 7 meters?



(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 14

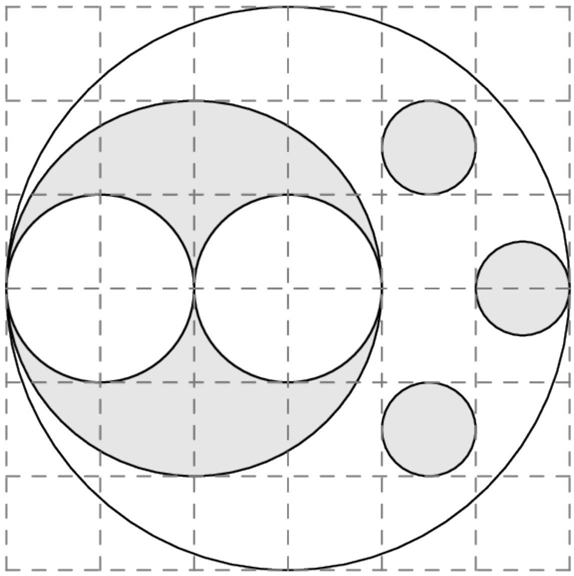
Câu 10 Harold made a plum pie to take on a picnic. He was able to eat only $\frac{1}{4}$ of the pie, and he left the rest for his friends. A moose came by and ate $\frac{1}{3}$ of what Harold left behind. After that, a porcupine ate $\frac{1}{3}$ of what the moose left behind. How much of the original pie still remained after the porcupine left?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{5}{12}$

Câu 11 NASA's Perseverance Rover was launched on July 30, 2020. After traveling 292,526,838 miles, it landed on Mars in Jezero Crater about 6.5 months later. Which of the following is closest to the Rover's average interplanetary speed in miles per hour?

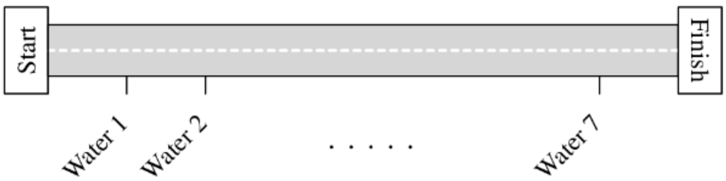
(A) 6,000 **(B)** 12,000 **(C)** 60,000 **(D)** 120,000 **(E)** 600,000

Câu 12 The figure below shows a large white circle with a number of smaller white and shaded circles in its interior. What fraction of the interior of the large white circle is shaded?



(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{11}{36}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{19}{36}$ **(E)** $\frac{5}{9}$

Câu 13 Along the route of a bicycle race, 7 water stations are evenly spaced between the start and finish lines, as shown in the figure below. There are also 2 repair stations evenly spaced between the start and finish lines. The 3rd water station is located 2 miles after the 1st repair station. How long is the race in miles?

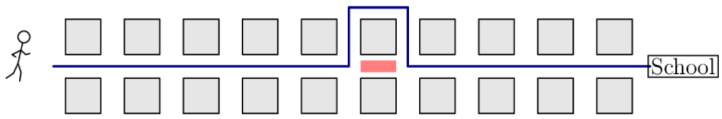


(A) 8 **(B)** 16 **(C)** 24 **(D)** 48 **(E)** 96

Câu 14 Nicolas is planning to send a package to his friend Anton, who is a stamp collector. To pay for the postage, Nicolas would like to cover the package with a large number of stamps. Suppose he has a collection of 5-cent, 10-cent, and 25-cent stamps, with exactly 20 of each type. What is the greatest number of stamps Nicolas can use to make exactly 7.10 in postage? (Note: The amount 7.10 corresponds to 7 dollars and 10 cents. One dollar is worth 100 cents.)

(A) 45 **(B)** 46 **(C)** 51 **(D)** 54 **(E)** 55

Câu 15 Viswam walks half a mile to get to school each day. His route consists of 10 city blocks of equal length and he takes 1 minute to walk each block. Today, after walking 5 blocks, Viswam discovers he has to make a detour, walking 3 blocks of equal length instead of 1 block to reach the next corner. From the time he starts his detour, at what speed, in mph, must he walk, in order to get to school at his usual time?



(A) 4 **(B)** 4.2 **(C)** 4.5 **(D)** 4.8 **(E)** 5

Câu 16 The letters P, Q, and R are entered into a 20×20 table according to the pattern shown below. How many Ps, Qs, and Rs will appear in the completed table?

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰
Q	R	P	Q	R	⋯
P	Q	R	P	Q	⋯
R	P	Q	R	P	⋯
Q	R	P	Q	R	⋯
P	Q	R	P	Q	⋯

(A) 132 Ps, 134 Qs, 134 Rs

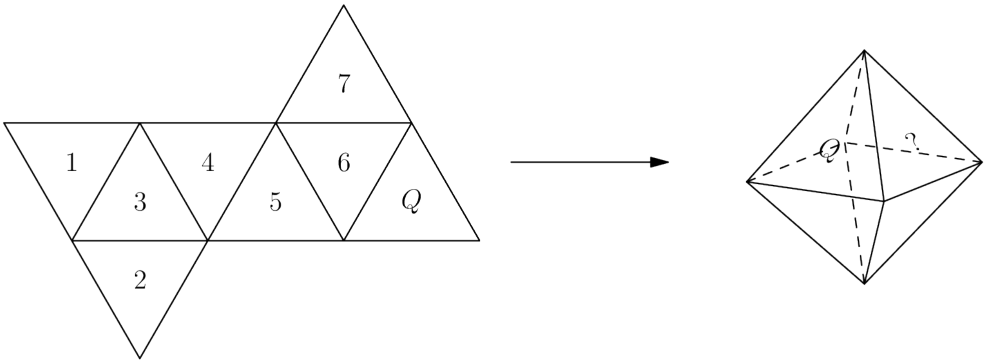
(B) 133 Ps, 133 Qs, 134 Rs

(C) 133 Ps, 134 Qs, 133 Rs

(D) 134 Ps, 132 Qs, 134 Rs

(E) 134 Ps, 133 Qs, 133 Rs

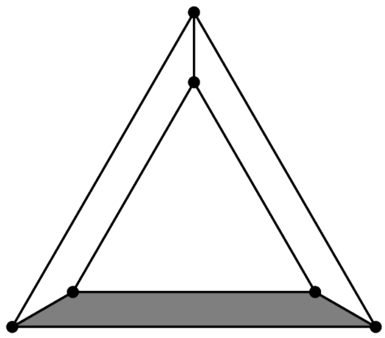
Câu 17 A regular octahedron has eight equilateral triangle faces with four faces meeting at each vertex. Jun will make the regular octahedron shown on the right by folding the piece of paper shown on the left. Which numbered face will end up to the right of Q?



(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Câu 18 Greta Grasshopper sits on a long line of lily pads in a pond. From any lily pad, Greta can jump 5 pads to the right or 3 pads to the left. What is the fewest number of jumps Greta must make to reach the lily pad located 2023 pads to the right of her starting point?
(A) 405 **(B)** 407 **(C)** 409 **(D)** 411 **(E)** 413

Câu 19 An equilateral triangle is placed inside a larger equilateral triangle so that the region between them can be divided into three congruent trapezoids, as shown below. The side length of the inner triangle is $\frac{2}{3}$ the side length of the larger triangle. What is the ratio of the area of one trapezoid to the area of the inner triangle?



(A) $1:3$ **(B)** $3:8$ **(C)** $5:12$ **(D)** $7:16$ **(E)** $4:9$

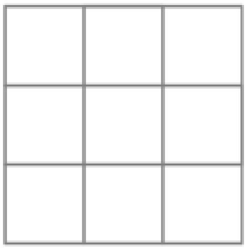
Câu 20 Two integers are inserted into the list $3, 3, 8, 11, 28$ to double its range. The mode and median remain unchanged. What is the maximum possible sum of two additional numbers?
(A) 56 **(B)** 57 **(C)** 58 **(D)** 60 **(E)** 61

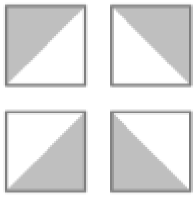
Câu 21 Alina writes the numbers $1, 2, \ldots, 9$ on separate cards, one number per card. She wishes to divide the cards into 3 groups of 3 cards so that the sum of the numbers in each group will be the same. In how many ways can this be done?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Câu 22 In a sequence of positive integers, each term after the second is the product of the previous two terms. The sixth term is 4000. What is the first term?

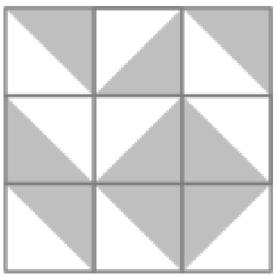
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 10

Câu 23 Each square in a 3×3 grid is randomly filled with one of the 4 gray and white tiles shown below on the right. What is the probability that the tiling will contain a large gray diamond



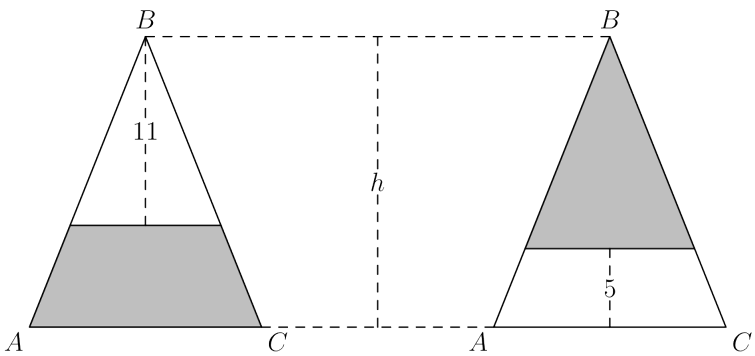


in one of the smaller 2×2 grids? Below is an example of such tiling.



(A) $\frac{1}{1024}$ **(B)** $\frac{1}{256}$ **(C)** $\frac{1}{64}$ **(D)** $\frac{1}{16}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

Câu 24 Isosceles triangle ABC has equal side lengths AB and BC. In the figures below, segments are drawn parallel to $\overline{AC}$ so that the shaded portions of $\triangle ABC$ have the same area. The heights of the two unshaded portions are 11 and 5 units, respectively. What is the height h of $\triangle ABC$?



(A) 14.6 **(B)** 14.8 **(C)** 15 **(D)** 15.2 **(E)** 15.4

Câu 25 Fifteen integers $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}$ are arranged in order on a number line. The integers are equally spaced and have the property that:

$$1 \leq a_1 \leq 10,\ 13 \leq a_2 \leq 20, \text{and } 241 \leq a_{15} \leq 250$$

What is the sum of digits of a_{14}?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 12

3.2.2 Lời giải cho đề ôn tập số 1:

Câu 1 Step-by-step calculation will lead you to the answer D. Answer: D

Câu 2 Unfolding the first time will give you a triangle in the middle. Unfold the second time will lead you to the answer E. Answer: E

Câu 3 Windchill$= 36 - 0.7 \times 18 = 23.4$. Answer: B

Câu 4 Fill out the grid and easily have the answer, which is D (19,23,47). Answer: D

Câu 5 We can easily obtain:

$$\frac{\text{the number of trout}}{\text{total number of fish}} = \frac{30}{180} = \frac{1}{6}$$

There are 250 trouts in the lake so there are $250.6 = 1500$ fish in the lake. Answer: B

Câu 6 If 0 is in the exponent box, the result is 0. The exponent box will take the value of only 2 or 3. Without the loss of generality, we would put 2 in the first box and 3 in the second box. Therefore, the answer would be $3^2 \times 2^0 = 9$, which is C. Answer: C

Câu 7 Extend the line and we may get the answer 1, which is B. Answer: B

Câu 8 The number of matches among the four players is $\frac{4 \times 3}{2} \times 2 = 12$. So there are 12 wins during 12 matches. We have seen 10 wins so Tiyo must have two more wins. Each round would record 2 wins as there are 2 matches/round. So this would lead to the answer: A (000101). Answer: A

Câu 9 The requested time intervals are:
from the 2nd to the 4th seconds
from the 6th to the 10th seconds
from the 12th to the 14th seconds.
In total, he would spend 8 seconds at such an elevation. Answer: B

Câu 10 The solution can be simplified with the following equation:

$$(1 - \frac{1}{4}).(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}.$$

After the third time, there was only left $\frac{1}{3}$ of the pie. Answer: D.

Câu 11 Note that 6.5 months is approximately $6.5 \cdot 30 \cdot 24$ hours. This leads to the answer C. Answer:

$$\frac{292{,}526{,}838}{6.5 \cdot 30 \cdot 24} \approx \frac{300{,}000{,}000}{6.5 \cdot 30 \cdot 24} = \frac{10{,}000{,}000}{6.5 \cdot 24} \approx \frac{10{,}000{,}000}{6.4 \cdot 25} = \frac{10{,}000{,}000}{160} = 62500$$

C

Câu 12 Assume the length of a small square is 1. The area of the shaded region can be calculated as:

$$2^2.\Pi - 2.1^2.\Pi + 3 \times (\frac{1}{2})^2.\Pi = \frac{11}{4}.\Pi$$

The area of the large white triangle is: $9.\Pi$ Therefore, the fraction of the interior of the inner shaded circle is: $\frac{\frac{11}{4}}{9} = \frac{11}{36}$. Answer: B

Câu 13 Assume the length of the bicycle race is a. The water stations would be located at:

$$\frac{a}{8}, \frac{2a}{8}, \ldots, \frac{7a}{8}$$

The repair stations are located at:

$$\frac{d}{3}, \frac{2d}{3}$$

Therefore, we can obtain the following equations:

$$\frac{3d}{8} = \frac{d}{3} + 2$$

Hence, the answer is D. Answer: D

Câu 14 Most stamps make 7.10. You have 20 of each coin, nickles, dimes and quarters.

If we want to have the most amount of stamps we have to have the most amount of smaller value coins. We can use 20 nickels and 20 dimes to bring our total cost to $7.10 - 3.00 = 4.10$. However when we try to use quarters the 25 cents don't fit evenly, so we have to give back 15 cents in order to make the quarter amount 4.25 the most efficient way to do this is to give back a dime and a nickel to have 38 coins used so far. This leads to the answer E. Answer: E

Câu 15 Since he has to start his detour, he only has 5 minutes to finish 7 blocks, which is 84 blocks per hour. 10 blocks have the length of $\frac{1}{2} miles$, so 84 blocks would have the length of 4.2 miles. So, therefore, he must walk at the speed of 4.2 miles per hour. Answer: B

Câu 16 The pattern for a 20×20 grid is that the following number of P, Q, R (respectively) is x,x+1,x. So therefore we would have $3x + 1 = 400 => x = 133$. The answer is C.

Câu 17 We label the octahedron going triangle by triangle until we reach the ? triangle. The triangle to the left of the Q should be labeled with a 6. Underneath triangle 6 is triangle 5. The triangle to the right of triangle 5 is triangle 4 and further to the right is triangle 3. Finally, the side of triangle 3 under triangle Q is 2, so the triangle to the right of Q is 1. Answer: A

Câu 18 If a represents the steps the frog needs each time he goes right and b represents the same but to the left. We would have the following equation:

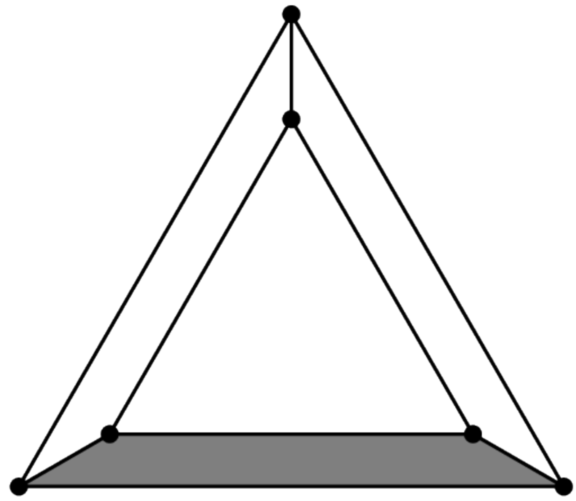
$$5a - 3b = 2023$$

Because a and b are both positive integers, 3b when divided by 5 will have the remainder of 2, or b when divided by 5 will have the remainder of 4. The smallest number that satisfies these conditions is 4. Therefore, $b = 4$ and $a = 407$ or $a + b = 411$. Answer: D

Câu 19 The ratio between two given equilateral triangles is: $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$. If the area of the inner triangle is 4a, the area of the outer triangel is 9a. Therefore, the area of a trapezoid is $\frac{5a}{3}$. The ratio of one trapezoid to the inner triangle is $\frac{\frac{5a}{3}}{4a} = \frac{5}{12}$. Answer: C

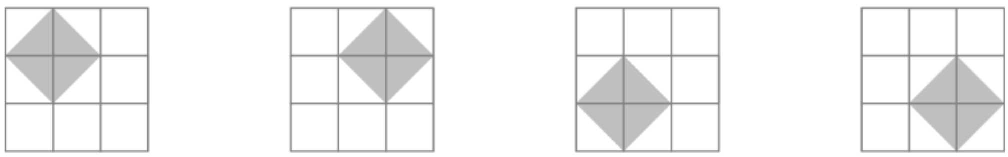
Câu 20 The new range is $(28 - 3) \times 2 = 50$. The Median is unaffected so the smaller value must be smaller than 8. The larger value, meanwhile, should be fixed at 53. So the maximum value of the sum is: $53 + 7 = 60$. Answer: 60

Câu 21 The sum of each group is: $\frac{45}{3} = 15$. The sum of the other 2 numbers in the group that has the number 9 is only 6. This will help us to obtain 2 groups $(9, 1, 5), (9, 2, 4)$. Therefore, there are only 2 groups. Answer: C



Câu 22 If the first two number is x and y (respectively), the sixth term would be $x^3.y^5$. Fortunately, we also have: $4000 = 2^5.5^3$ so $x = 5, y = 2$. So the first term is $x = 5$. Answer: D

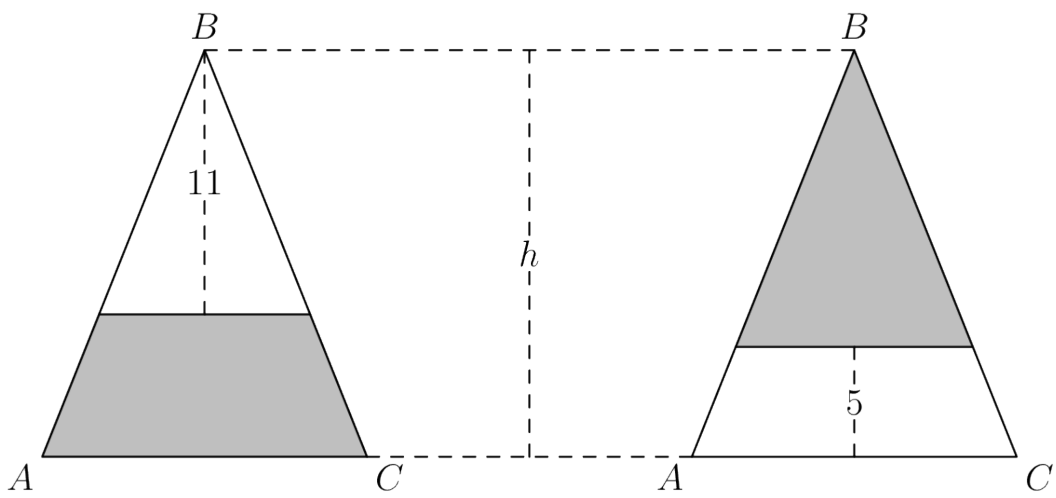
Câu 23 There are 4 cases that the tiling will contain a large gray diamond in one of the smaller 2×2 grids, as shown below: There are 4^5 ways to decide the 5 white squares for each case, and



the cases do not overlap. So, the requested probability is:

$$\frac{4 \cdot 4^5}{4^9} = \frac{4^6}{4^9} = \frac{1}{4^3}$$

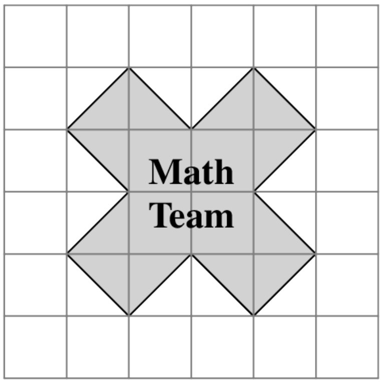
Câu 24 First, we notice that the smaller isosceles triangles are similar to the larger isosceles triangles. We can find that the area of the gray area in the first triangle is $[ABC] \cdot \left(1 - \left(\frac{11}{h}\right)^2\right)$. Similarly, we can find that the area of the gray part in the second triangle is $[ABC] \cdot \left(\frac{h-5}{h}\right)^2$. These areas are equal, so $1 - \left(\frac{11}{h}\right)^2 = \left(\frac{h-5}{h}\right)^2$. Simplifying yields $10h = 146$ so $h = 14.6$



Câu 25 Because the numbers are equally spaced so let d be the difference between consecutive numbers. The $a_{15} = a_1 + 14d$ therefore $231 \leq 14d \leq 249 => d = 17$. Hence, the second number: $a_2 = a_1 + d = a_1 + 17 => 0 \leq a_1 \leq 3$. The Last inequality helps us to obtain that: $3 \leq a_1$.When $a_1 = 3$,$a_14 = a_1 + 13d = 3 + 221 = 224$. Answer: 224

3.2.3 Đề ôn tập số 2:

Câu 1 The Math Team designed a logo shaped like a multiplication symbol, shown below on a grid of 1-inch squares. What is the area of the logo in square inches?



(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 15

Câu 2 Consider these two operations: What is the value of $(5 \blacklozenge 3) \bigstar 6$?

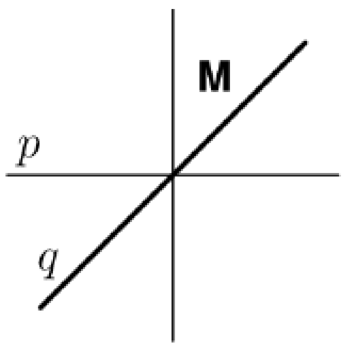
$$a \blacklozenge b = a^2 - b^2$$
$$a \bigstar b = (a-b)^2$$

(A) -20 **(B)** 4 **(C)** 16 **(D)** 100 **(E)** 220

Câu 3 When three positive integers a, b, and c are multiplied together, their product is 100. Suppose $a < b < c$. In how many ways can the numbers be chosen?

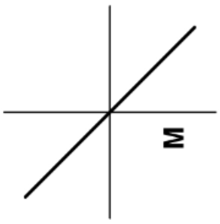
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

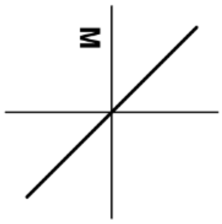
Câu 4 The letter M in the figure below is first reflected over the line q and then reflected over the line p. What is the resulting image?

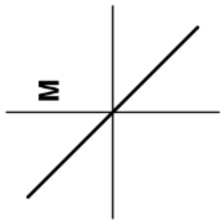


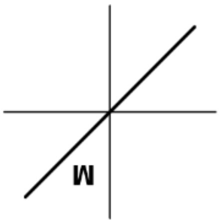
Câu 5 Anna and Bella are celebrating their birthdays together. Five years ago, when Bella turned 6 years old, she received a newborn kitten as a birthday present. Today the sum of the ages of the two children and the kitten is 30 years. How many years older than Bella is Anna?

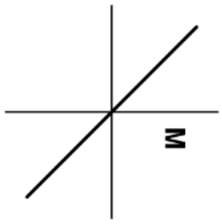
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


Câu 6 Three positive integers are equally spaced on a number line. The middle number is 15, and the largest number is 4 times the smallest number. What is the smallest of these three numbers?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

Câu 7 When the World Wide Web first became popular in the 1990s, download speeds reached a maximum of about 56 kilobits per second. Approximately how many minutes would the download of a 4.2-megabyte song have taken at that speed? (Note that there are 8000 kilobits in a megabyte.)

(A) 0.6 **(B)** 10 **(C)** 1800 **(D)** 7200 **(E)** 36000

Câu 8 What is the value of

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{18}{20}\cdot\frac{19}{21}\cdot\frac{20}{22}?$$

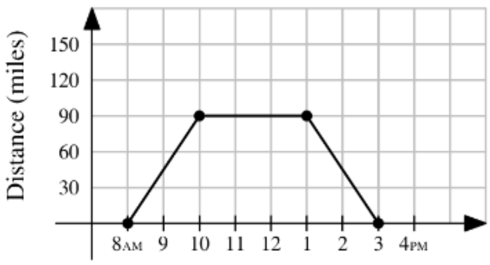
(A) $\frac{1}{462}$ **(B)** $\frac{1}{231}$ **(C)** $\frac{1}{132}$ **(D)** $\frac{2}{213}$ **(E)** $\frac{1}{22}$

Câu 9 A cup of boiling water (212°F) is placed to cool in a room whose temperature remains constant at 68°F. Suppose the difference between the water temperature and the room temperature is halved every 5 minutes. What is the water temperature, in degrees Fahrenheit, after 15 minutes?

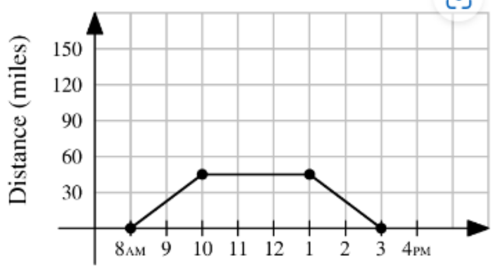
(A) 77 **(B)** 86 **(C)** 92 **(D)** 98 **(E)** 104

Câu 10 One sunny day, Ling decided to take a hike in the mountains. She left her house at 8 AM, drove at a constant speed of 45 miles per hour, and arrived at the hiking trail at 10 AM. After hiking for 3 hours, Ling drove home at a constant speed of 60 miles per hour. Which of the following graphs best illustrates the distance between Ling's car and her house over the course of her trip?

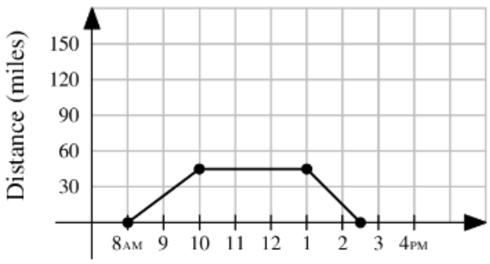
(A)



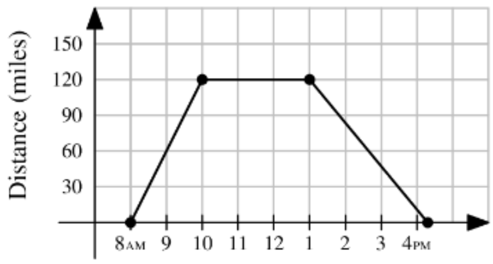
(B)



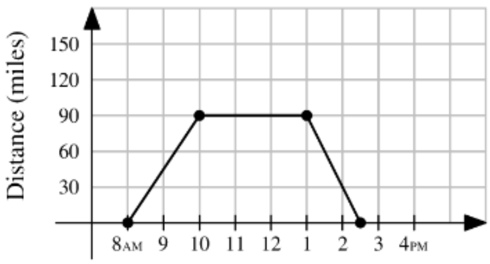
(C)



(D)



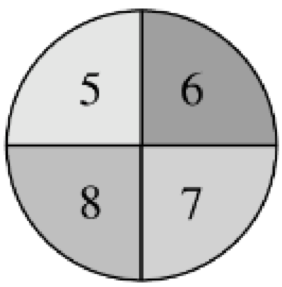
(E)



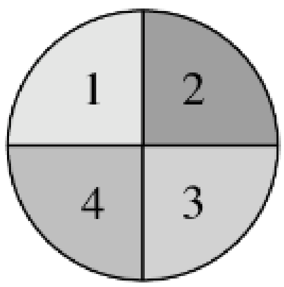
Câu 11 Henry the donkey has a very long piece of pasta. He takes a number of bites of pasta, each time eating 3 inches of pasta from the middle of one piece. In the end, he has 10 pieces of pasta whose total length is 17 inches. How long, in inches, was the piece of pasta he started with?

(A) 34 **(B)** 38 **(C)** 41 **(D)** 44 **(E)** 47

Câu 12 The arrows on the two spinners shown below are spun. Let the number N equal 10 times the number on Spinner A, added to the number on Spinner B. What is the probability that N is a perfect square number?



Spinner A



Spinner B

(A) $\frac{1}{16}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{3}{8}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

Câu 13 How many positive integers can fill the blank in the sentence below?

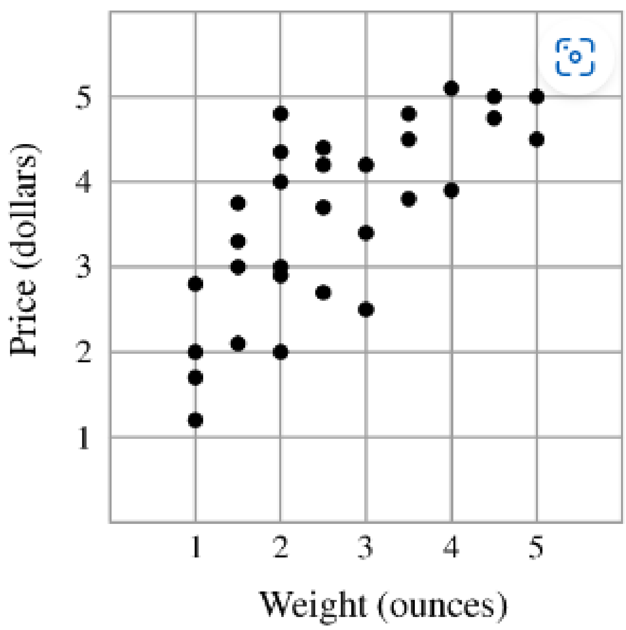
One positive integer is ... more than twice another, and the sum of the two numbers is 28.

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

Câu 14 In how many ways can the letters in **BEEKEEPER** be rearranged so that two or more **E**s do not appear together?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 12 **(D)** 24 **(E)** 120

Câu 15 Laszlo went online to shop for black pepper and found thirty different black pepper options varying in weight and price, shown in the scatter plot below. In ounces, what is the weight of the pepper that offers the lowest price per ounce?



(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Câu 16 Four numbers are written in a row. The average of the first two is 21, the average of the middle two is 26, and the average of the last two is 30. What is the average of the first and last of the numbers?

(A) 24 **(B)** 25 **(C)** 26 **(D)** 27 **(E)** 28

Câu 17 If n is an even positive integer, the *double factorial* notation $n!!$ represents the product of all the even integers from 2 to n. For example, $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$. What is the units digit of the following sum?

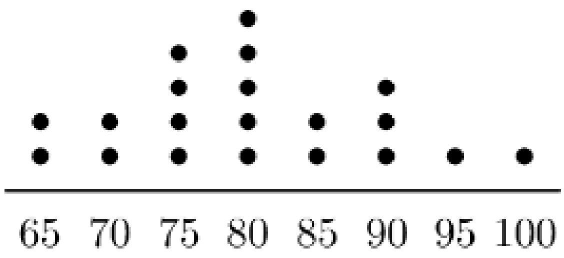
$$2!! + 4!! + 6!! + \cdots + 2018!! + 2020!! + 2022!!$$

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

Câu 18 The midpoints of the four sides of a rectangle are $(-3,0),(2,0),(5,4)$, and $(0,4)$. What is the area of the rectangle?

(A) 20 **(B)** 25 **(C)** 40 **(D)** 50 **(E)** 80

Câu 19 Mr. Ramos gave a test to his class of 20 students. The dot plot below shows the distribution of test scores. Later Mr. Ramos discovered that there was a scoring error on one of the questions.



He regraded the tests, awarding some of the students 5 extra points, which increased the median test score to 85. What is the minimum number of students who received extra points?

(Note that the median test score equals the average of the 2 scores in the middle if the 20 test scores are arranged in increasing order.)

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Câu 20 The grid below is to be filled with integers in such a way that the sum of the numbers in each row and the sum of the numbers in each column are the same. Four numbers are missing. The number x in the lower left corner is larger than the other three missing numbers. What is the smallest possible value of x?

-2	9	5
		-1
x		8

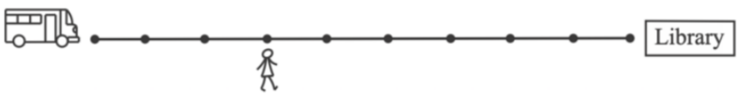
(A) -1 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 9

Câu 21 Steph scored 15 baskets out of 20 attempts in the first half of a game, and 10 baskets out of 10 attempts in the second half. Candace took 12 attempts in the first half and 18 attempts in the second. In each half, Steph scored a higher percentage of baskets than Candace. Surprisingly they ended with the same overall percentage of baskets scored. How many more baskets did Candace score in the second half than in the first?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

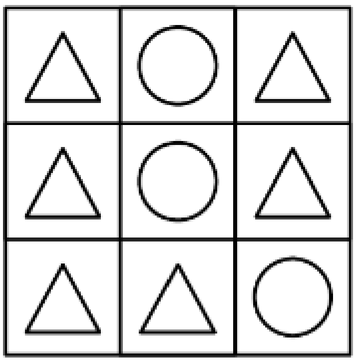
	First Half	Second Half
Steph	$\frac{15}{20}$	$\frac{10}{10}$
Candace	$\frac{\square}{12}$	$\frac{\square}{18}$

Câu 22 A bus takes 2 minutes to drive from one stop to the next, and waits 1 minute at each stop to let passengers board. Zia takes 5 minutes to walk from one bus stop to the next. As Zia reaches a bus stop, if the bus is at the previous stop or has already left the previous stop, then she will wait for the bus. Otherwise she will start walking toward the next stop. Suppose the bus and Zia start at the same time toward the library, with the bus 3 stops behind. After how many minutes will Zia board the bus?



(A) 17 **(B)** 19 **(C)** 20 **(D)** 21 **(E)** 23

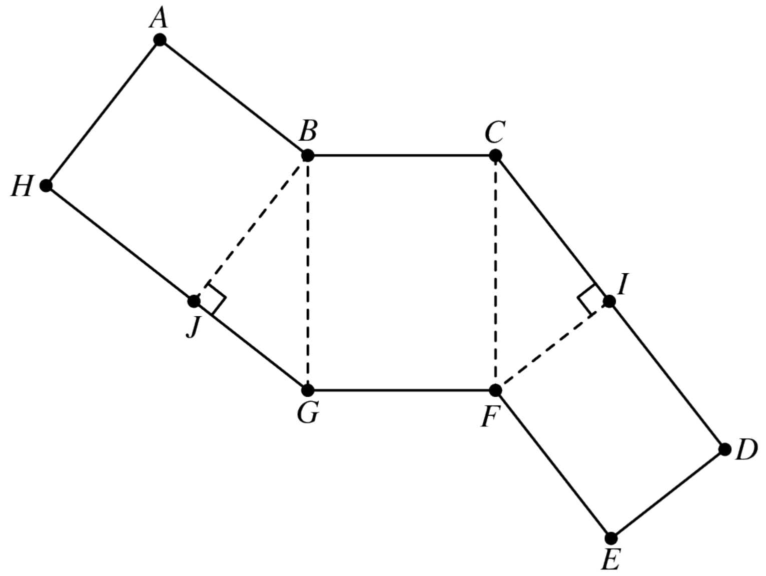
Câu 23 A $\triangle$ or $\bigcirc$ is placed in each of the nine squares in a 3-by-3 grid. Shown below is a sample configuration with three $\triangle$s in a line.



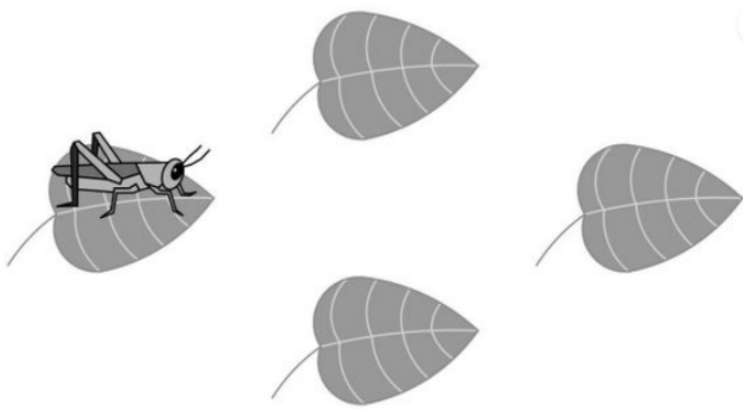
(A) 39 **(B)** 42 **(C)** 78 **(D)** 84 **(E)** 96

Câu 24 The figure below shows a polygon $ABCDEFGH$, consisting of rectangles and right triangles. When cut out and folded on the dotted lines, the polygon forms a triangular prism. Suppose that $AH = EF = 8$ and $GH = 14$. What is the volume of the prism?

(A) 112 **(B)** 128 **(C)** 192 **(D)** 240 **(E)** 288



Câu 25 A cricket randomly hops between 4 leaves, on each turn hopping to one of the other 3 leaves with equal probability. After 4 hops, what is the probability that the cricket has returned to the leaf where it started?



(A) $\frac{2}{9}$ **(B)** $\frac{19}{80}$ **(C)** $\frac{20}{81}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** $\frac{7}{27}$

3.2.4 Lời giải cho đề ôn tập số 2:

Câu 1 Each small triangle has an area of $\frac{1}{2}$ inch square so the total area of the logo is: $\frac{1}{2} \times 20 = 10$ inch square. Answer: A

Câu 2 Step by step calculation will lead you to the answer of 100. Answer: D

Câu 3 $a^3 \leq a \times b \times c = 100$, hence $a \leq 4$. Positive divisors that are less or equal to 100 is 1,2,4. So we will work on three cases of a:
If a=1: there are 3 possible solutions for (b,c): (2,50),(4,25),(5,20)
If a=2: there is only one possible solution for (b,c): (5,10)
If a=4, $b \times c = 25$ so there isn't any possible solution.
In total, there are 4 possible solutions.

Câu 4 Easily obtain the image of answer A. Answer: A

Câu 5 Five years ago, Bella was 6 years old, and the kitten was 0 years old. Today, Bella is 11 years old, and the kitten is 5 years old. It follows that Anna is $30 - 11 - 5 = 14$ years old. Therefore, Anna is 3 years older than Bella. Answer: C

Câu 6 If the first number is a and the equal difference between these 3 numbers is d, the third number would be $a + 2d$. We have:
$a + 2d = 4a => 2d = 3a$
We also have the second number, which is $a + d$, has a value of 15. So we have:
$a + d = 15$.
From the two statements above, we would obtain $d = 9, a = 6$. Therefore, the smallest would be: 6. Answer: 6

Câu 7 We seek a value of x that makes the following equation true since every other quantity equals 1.

$$\frac{x \text{ min}}{4.2 \text{ mb}} \cdot \frac{56 \text{ kb}}{1 \text{ sec}} \cdot \frac{1 \text{ mb}}{8000 \text{ kb}} \cdot \frac{60 \text{ sec}}{1 \text{ min}} = 1.$$

This leads to the answer x=10. Answer: B

Câu 8 All the values from 3 to 20 appear on both the numerator and the denominator. So the values that remain on the numerator are 1 and 2 while those on the denominator are 21 and 22. So the answer is:

$$\frac{1 \times 2}{21 \times 22} = \frac{1}{231}$$

Answer:B

Câu 9 The initial difference between water temperature and room temperature is:
degrees Farenheit. After 15 minutes, the difference remains:
degrees Farenheit. At that point, the water temperature is: $68 + 18 = 86$ degrees Farenheit. Answer: B

Câu 10 Her car is 90 miles from her home by the time she arrives at the mountain at 10 pm. She hikes for 3 hours so the answer is E by analysis. Answer: E

Câu 11 The length of the piece of pasta is:

$$(10-1)\times 3+17=44$$

inches long. Answer: D

Câu 12 16 total possible values from the calculations. There are only 2 square numbers from these ones, which are 64 and 81. So the probability that N is a perfect square is $\frac{1}{8}$. Answer: B

Câu 13 Let a and b be the two mentioned numbers $(a>b)$. Therefore it exists $d>0$ such that $a=2b+d$. We have: $3b+d=28$ so $d=28-3b$. b is a positive integer and $3b<28$ so $b<10$. Hence, there are 9 possible solutions. Answer: D

Câu 14 All valid arrangements of the letters must be of the form:

E...E...E...E...E

Four remaining spaces will offer 24 ways. Answer: D

Câu 15 We are looking for a black point, that when connected to the origin, yields the lowest slope. The slope represents the price per ounce. We can visually find that the point with the lowest slope is the blue point. Furthermore, it is the only one with a price per ounce significantly less than 1. Hence, the answer is C, which has the lowest slope.

Câu 16 The sum of the four numbers is: $21\times 2+30\times 2=102$. So the sum of the first and the last number is: $102-52\times 2=50$ or the average of these two numbers is 25. Answer: B

Câu 17 Once $n>8$, $n!!$ will have a unit digit of 0 has it has the factor 10. So the last digit of:

$$2!!+4!!+6!!+8!!$$

is 2.

Answer: B

Câu 18 Let $A=(-3,0), B=(2,0), C=(5,4)$, and $D=(0,4)$. Note that A,B,C, and D are the vertices of a rhombus whose diagonals have lengths $AC=4\sqrt{5}$ and $BD=2\sqrt{5}$. It follows that the dimensions of the rectangle are $4\sqrt{5}$ and $2\sqrt{5}$, so the area of the rectangle is $4\sqrt{5}.2\sqrt{5}=40$

Answer: C

Câu 19 The initial median is $\dfrac{80+80}{2}=80$. The subsequent median after adding the score is 85. The students who achieve 85 are at the position of 15^{th} and 16^{th}. In order for the median to be 85, the students therefore must achieve 85 with the position of 10^{th} and 11^{th} in ascending order. Therefore, the minimum number of students having their scores is:

$$15-11=4 \text{ students}$$

Answer: C

Câu 20 The sum of the numbers in each row is 12. Consider the second row. In order for the sum of the numbers in this row to equal 12, the two shaded numbers must add up to 13: If two numbers add up to 13, one of them must be at least 7: If both shaded numbers are no more than 6, their sum can be at most 12. Therefore, for x to be larger than the three missing numbers, x must be at least 8. We can construct a working scenario where $x=8$: Answer: D

-2	9	5
		-1
x		8

-2	9	5
6	7	-1
8	-4	8

Câu 21 If x represents the number Candace made in the first half, and y represents that of the second half. We will have: $x + y = 25$. Moreover, we have:

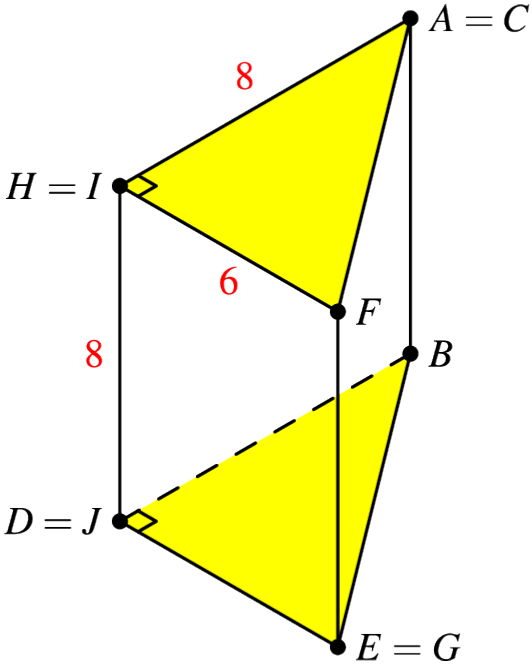
$$\frac{x}{12} < \frac{15}{20} \text{ and } \frac{y}{18} < \frac{10}{20}$$

so $x < 9$ and $y < 18$. $x + y = 25$ so $x = 8$, $y = 17 => y - x = 9$. Answer: 9

Câu 22 Since Zia will wait for the bus if the bus is at the previous stop, we can create an equation to solve for when the bus is at the previous stop. The bus travels $\frac{1}{3}$ of a stop per minute, and Zia travels $\frac{1}{5}$ of a stop per minute. Now we create the equation, $\frac{1}{3}m = \frac{1}{5}m + 3 - 1$ (the -1 accounts for us wanting to find when the bus reaches the stop before Zia's). Solving, we find that $m = 15$. Now Zia has to wait 2 minutes for the bus to reach her. Therefore, the answer is 17. Answer: A

Câu 23 In Cases where three identical symbols are in the same column and the same row is the same, so we will evaluate one and then double at last. 3 ways to choose a column with 3 circles and 2 ways for all triangles. The third one can be filled in 8 ways, so there are 48 ways. There are overlap cases, which are 2 complete columns and 1 complete column with another symbol, which takes 6 cases. So there are 42 in total, which when doubled will give the answer of 84. Answer: D

Câu 24 Folding polygon $ABCDEFGH$ on the dotted lines: The volume of the given polygon is: $\frac{8 \times 6}{2} \times 8 = 192$. Answer: C



Câu 25 There are always three possible leaves to jump to every time the cricket decides to jump, so there is a total number of 3^4 routes. Let A denote the leaf cricket starts at, and B, C, D be the other leaves. If we want the cricket to move to leaf A for its last jump, the cricket cannot jump to leaf A for its third jump. Also, considering that the cricket starts at leaf A, he cannot jump to leaf A for its first jump. Note that there are $3 \cdot 2 = 6$ paths if the cricket moves to leaf A for its third jump. Therefore, we can conclude that the total number of possible paths for the cricket to return to leaf A after four jumps is $3^3 - 6 = 21$. So the answer is $\frac{21}{81} = \frac{7}{21}$
Answer: E

3.2.5 Đề ôn tập số 3:

Câu 1 Luka is making lemonade to sell at a school fundraiser. His recipe requires 4 times as much water as sugar and twice as much sugar as lemon juice. He uses 3 cups of lemon juice. How many cups of water does he need?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 18 **(E)** 24

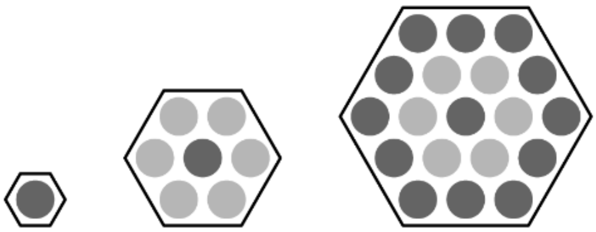
Câu 2 Four friends do yardwork for their neighbors over the weekend, earning $15, 20, 25, 40$ dollars respectively. They decide to split their earnings equally among themselves. In total how much will the friend who earned 40 dollars give to the others?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 18 **(E)** 24

Câu 3 Carrie has a rectangular garden that measures 6 feet by 8 feet. She plants the entire garden with strawberry plants. Carrie is able to plant 4 strawberry plants per square foot, and she harvests an average of 10 strawberries per plant. How many strawberries can she expect to harvest?

(A) 560 **(B)** 960 **(C)** 1120 **(D)** 1920 **(E)** 3840

Câu 4 Three hexagons of increasing size are shown below. Suppose the dot pattern continues so that each successive hexagon contains one more band of dots. How many dots are in the next hexagon?



(A) 35 **(B)** 37 **(C)** 39 **(D)** 43 **(E)** 49

Câu 5 Three fourths of a pitcher is filled with pineapple juice. The pitcher is emptied by pouring an equal amount of juice into each of 5 cups. What percent of the total capacity of the pitcher did each cup receive?

(A) 5 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 20 **(E)** 25

Câu 6 Aaron, Darren, Karen, Maren, and Sharon rode on a small train that has five cars that seat one person each. Maren sat in the last car. Aaron sat directly behind Sharon. Darren sat in one of the cars in front of Aaron. At least one person sat between Karen and Darren. Who sat in the middle car?

(A) Aaron **(B)** Darren **(C)** Karen **(D)** Maren **(E)** Sharon

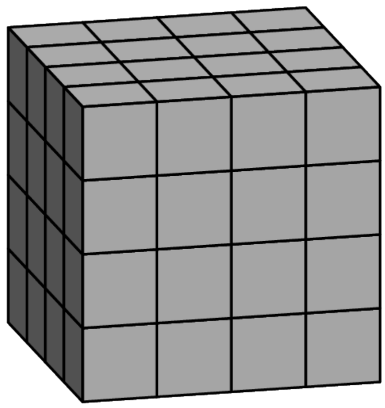
Câu 7 How many integers between 2020 and 2400 have four distinct digits arranged in increasing order? (For example, 2347 is one integer.)

(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 21 **(E)** 28

Câu 8 Ricardo has 2020 coins, some of which are pennies (1-cent coins) and the rest of which are nickels (5-cent coins). He has at least one penny and at least one nickel. What is the difference in cents between the greatest possible and least possible amounts of money that Ricardo can have?

(A) 8062 **(B)** 8068 **(C)** 8072 **(D)** 8076 **(E)** 8082

Câu 9 Akash's birthday cake is in the form of a $4 \times 4 \times 4$ inch cube. The cake has icing on the top and the four side faces, and no icing on the bottom. Suppose the cake is cut into 64 smaller cubes, each measuring $1 \times 1 \times 1$ inch, as shown below. How many small pieces will have icing on exactly two sides?

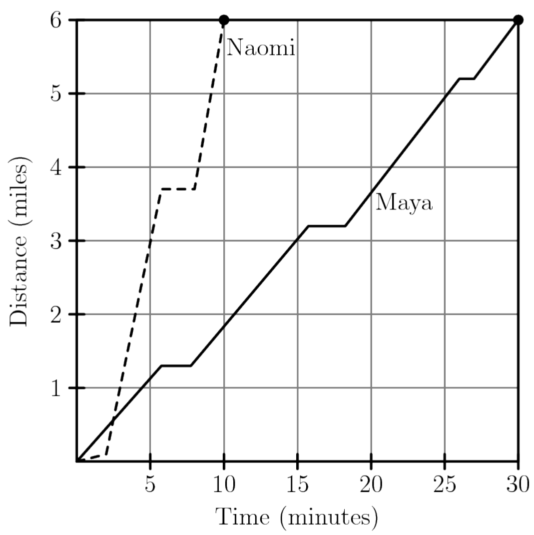


(A) 12 **(B)** 16 **(C)** 18 **(D)** 20 **(E)** 24

Câu 10 Zara has a collection of 4 marbles: an Aggie, a Bumblebee, a Steelie, and a Tiger. She wants to display them in a row on a shelf, but does not want to put the Steelie and the Tiger next to one another. In how many ways can she do this?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 18 **(E)** 24

Câu 11 After school, Maya and Naomi headed to the beach, 6 miles away. Maya decided to bike while Naomi took a bus. The graph below shows their journeys, indicating the time and distance traveled. What was the difference, in miles per hour, between Naomi's and Maya's average speeds?



(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 18 **(D)** 20 **(E)** 24

Câu 12 For a positive integer n, the factorial notation $n!$ represents the product of the integers from n to 1. (For example, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.) What value of N satisfies the following equation?

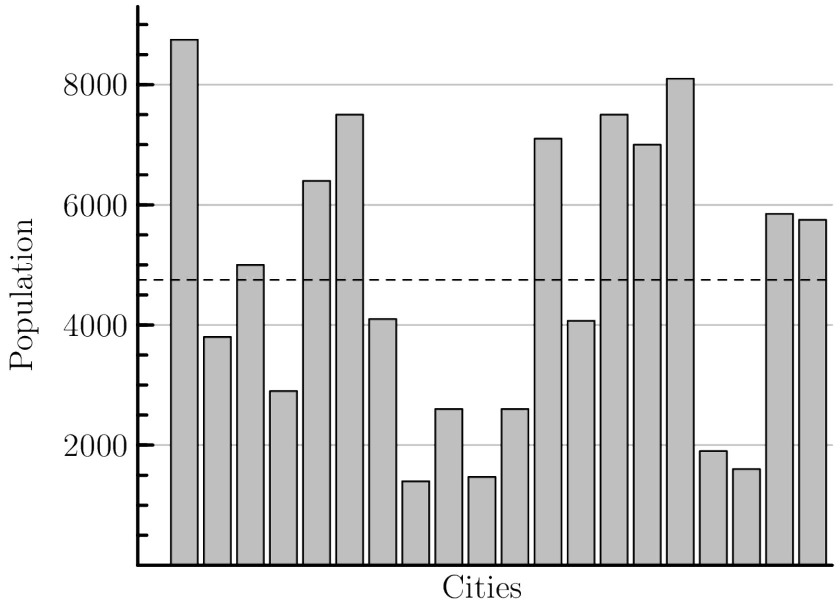
$$5! \times 9! = 12 \times N!$$

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

Câu 13 Jamal has a drawer containing 6 green socks, 18 purple socks, and 12 orange socks. After adding more purple socks, Jamal noticed that there is now a 60% chance that a sock randomly selected from the drawer is purple. How many purple socks did Jamal add?

(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 12 **(D)** 18 **(E)** 24

Câu 14 There are 20 cities in the County of Newton. Their populations are shown in the bar chart below. The average population of all the cities is indicated by the horizontal dashed line. Which of the following is closest to the total population of all 20 cities?

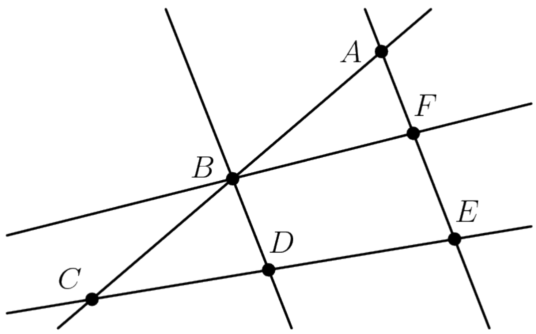


(A) 65,000 **(B)** 75,000 **(C)** 85,000 **(D)** 95,000 **(E)** 105,000

Câu 15 Suppose 15% of x equals 20% of y. What percentage of x is y?

(A) 5 **(B)** 35 **(C)** 75 **(D)** $133\frac{1}{3}$ **(E)** 300

Câu 16 Each of the points A, B, C, D, E, and F in the figure below represents a different digit from 1 to 6. Each of the five lines shown passes through some of these points. The digits along each line are added to produce five sums, one for each line. The total of the five sums is 47. What is the digit represented by B?

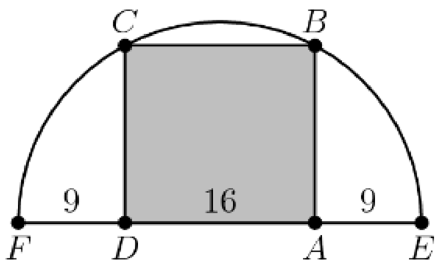


(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Câu 17 How many factors of 2020 have more than 3 factors? (As an example, 12 has 6 factors, namely $1, 2, 3, 4, 6$, and 12.)

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

Câu 18 Rectangle $ABCD$ is inscribed in a semicircle with diameter $\overline{FE}$, as shown in the figure. Let $DA = 16$, and let $FD = AE = 9$. What is the area of $ABCD$?



(A) 240 **(B)** 248 **(C)** 256 **(D)** 264 **(E)** 272

Câu 19 A number is called flippy if its digits alternate between two distinct digits. For example, 2020 and 37373 are flippy, but 3883 and 123123 are not. How many five-digit flippy numbers are divisible by 15?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

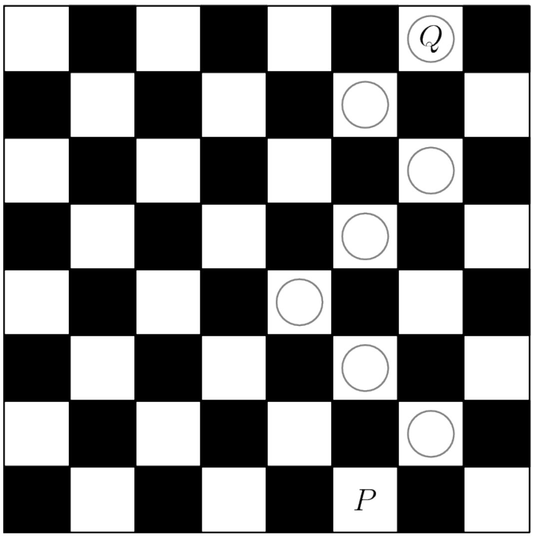
Câu 20 A scientist walking through a forest recorded as integers the heights of 5 trees standing in a row. She observed that each tree was either twice as tall or half as tall as the one to its right. Unfortunately some of her data was lost when rain fell on her notebook. Her notes are shown below, with blanks indicating the missing numbers. Based on her observations, the scientist was able to reconstruct the lost data. What was the average height of the trees, in meters?

Tree 1	___ meters
Tree 2	11 meters
Tree 3	___ meters
Tree 4	___ meters
Tree 5	___ meters
Average height	___ .2 meters

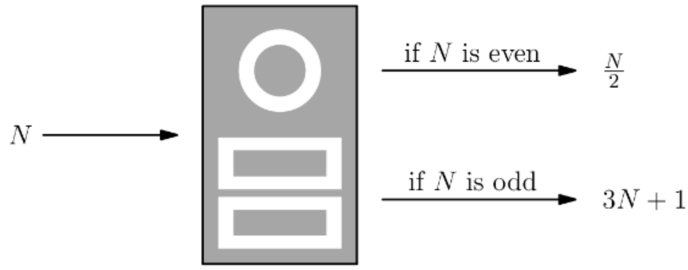
(A) 22.2 **(B)** 24.2 **(C)** 33.2 **(D)** 35.2 **(E)** 37.2

Câu 21 A game board consists of 64 squares that alternate in color between black and white. The figure below shows square P in the bottom row and square Q in the top row. A marker is placed at P. A step consists of moving the marker onto one of the adjoining white squares in the row above. How many 7-step paths are there from P to Q? (The figure shows a sample path.)

(A) 28 **(B)** 30 **(C)** 32 **(D)** 33 **(E)** 35



Câu 22 When a positive integer N is fed into a machine, the output is a number calculated according to the rule shown below. For example, starting with an input of $N = 7$, the machine will output



$3 \cdot 7 + 1 = 22$. Then if the output is repeatedly inserted into the machine five more times, the final output is 26.

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26$$

When the same 6-step process is applied to a different starting value of N, the final output is 1. What is the sum of all such integers N?

$$N \to \_\_ \to \_\_ \to \_\_ \to \_\_ \to \_\_ \to 1$$

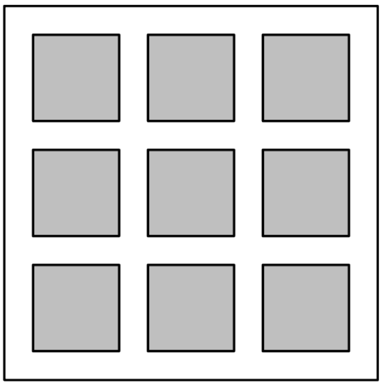
(A) 73 **(B)** 74 **(C)** 75 **(D)** 82 **(E)** 83

Câu 23 Five different awards are to be given to three students. Each student will receive at least one award. In how many different ways can the awards be distributed?

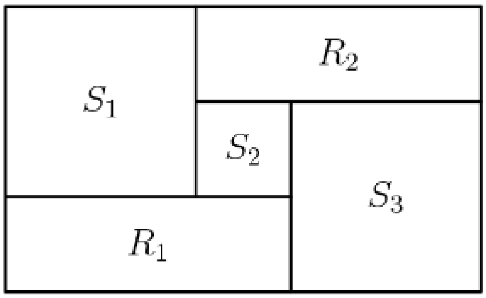
(A) 120 **(B)** 150 **(C)** 180 **(D)** 210 **(E)** 240

Câu 24 A large square region is paved with n^2 gray square tiles, each measuring s inches on a side. A border d inches wide surrounds each tile. The figure below shows the case for $n = 3$. When $n = 24$, the 576 gray tiles cover 64% of the area of the large square region. What is the ratio $\frac{d}{s}$ for this larger value of n?

(A) $\frac{6}{25}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{9}{25}$ **(D)** $\frac{7}{16}$ **(E)** $\frac{9}{16}$



Câu 25 Rectangles R_1 and R_2, and squares $S_1,\ S_2,$ and S_3, shown below, combine to form a rectangle that is 3322 units wide and 2020 units high. What is the side length of S_2 in units?



(A) 651 **(B)** 655 **(C)** 656 **(D)** 662 **(E)** 666

3.2.6 Lời giải cho đề ôn tập số 3:

Câu 1 The number of cups of water he needs is: $3 \times 2 \times 4 = 24$ cups. Answer: E

Câu 2 Each friend would have: $(15+20+25+40)/4 = 25$ dollars. The friend who earned 40 dollars must therefore give: $40 - 25 = 15$ dollars. Answer: C

Câu 3 The area of the garden is: $6 \times 8 = 48$ feet. There are 4 strawberry plants per square foot and 10 strawberries per plant so the total number of strawberries she expect to harvest is:

$$48 \times 4 \times 10 = 1920 \text{ strawberries.}$$

Answer: D

Câu 4 There is 1 dot in the first hexagon, there are $2+3+2$ dots in the second, and $3+4+5+4+3$ dots in the third one. So the fourth contains: $4+5+6+7+6+5+4+3 = 37$ dots. Answer: B

Câu 5 Each cup is filled with $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$. So therefore the percentage of a total capacity of the pitcher is $\frac{3}{20} \times 100 = 15$. Answer: C

Câu 6 The last car is Maren so there are remaining four cars. We suppose that Aaron and Sharon sit in a couple of cars, and Darren sit in front of Aaron so there are 3 conditions that can satisfy the above-mentioned conditions: MASDK, MASKD, MKASD. The only possible arrangement that satisfies the last condition is MKASD. Answer: A

Câu 7 The second digit can be only 3 as the number is smaller than 2400. The last digit is more than 3, which only satisfies $4, 5, 6, 7, 8, 9$. There are:

$$6 \times \frac{5}{2} = 15$$

ways. Answer: 15

Câu 8 If Ricardo has n pennies, he would have $2020 - n$ nickles. He must have at least one penny so we have: $1 \leq p \leq 2019$. The maximum number of cents he can make is: $2019 \times 5 + 1 = 10096$ cents. The required difference is: $4 \times 2018 = 8072$ cents. Answer: C

Câu 9 There are 8 edges in total and each edge will provide 2 cubes that are painted on exactly 2 sides. There are 4 corners so there are total of 20 cubes. Answer: D

Câu 10 There are 4! ways to arrange 4 marbles. However, there are $2 \times 3! = 12$. So there are total: 12 ways. Answer: C

Câu 11 Naomi's speed is $\frac{6}{\frac{1}{6}} = 36$ mph. The answer is: $36 - 12 = 24$ mph. Answer: E

Câu 12 $5! = 120$, therefore we can obtain that: $120 \times 9! = 12 \times N!$ so $N! \times 12 = 12 \times 10!$. So therefore $N = 10$. Answer: 10

Câu 13 There are currently 36 socks in total. If he added n socks, there are total $36 + n$ socks. There is a chance of 60 percent is that a sock selected is purple. So we have:

$$\frac{(18+a)}{(36+a)} = \frac{3}{5}$$

so therefore $a = 9$. Answer: B

Câu 14 The total population of all 20 cities is: $4750 \times 20 = 95000$ Answer: D

Câu 15 WLOG, let $x = 100$, we will therefore have: $0.15 \times 100 = 0.2 \times y$. Hence, $y = 75$, and y is 75 percent of x. Answer: C

Câu 16 The sum on each line is:

$$A + B + C$$
$$A + F + E$$
$$B + F$$
$$C + D + E$$
$$B + D$$

The sum of all the above-mentioned sums is: $2(A + B + C + D + E + F) + B = 47$. The sum of A,B,C,D,E,F is $\frac{6 \times 7}{2} = 21$. So hence the value of B is 5. Answer: E.

Câu 17 Since $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, we can simply list its factors:

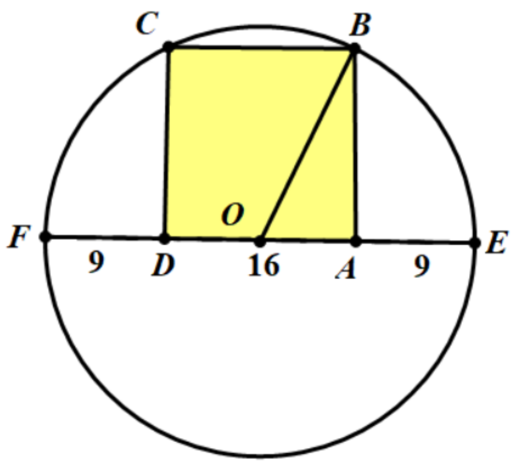
$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020.$$

There are 12 of these; only $1, 2, 4, 5, 101$ (i.e. 5 of them) don't have over 3 factors, so the remaining have 7 factors have more than 3 factors in total.

Câu 18 We have $FD = AE$ so the midpoint of AD is the center of the circle. Let the center of the circle is O. We have:

$$BA = \sqrt{BO^2 - OA^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$$

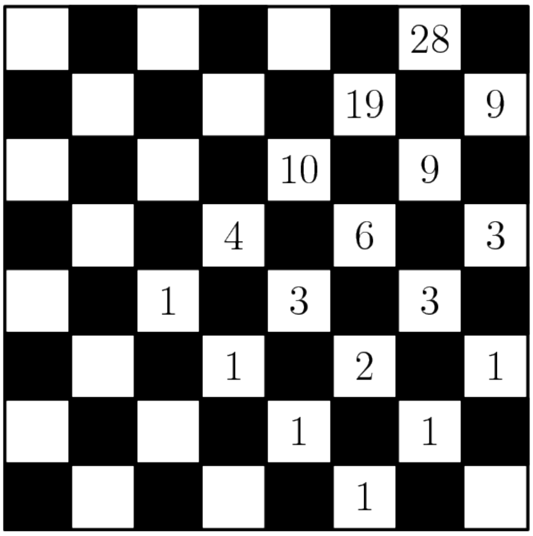
the area of ABCD is: $15 * 16 = 240$. Answer: A



Câu 19 If the number is $\overline{ababa}$, we then have $10101a + 1010b$ is divisible by 15 or $6a + 5b$ divisible by 15. Therefore, a divisible by 5 and b is divisible by 3. This will hence give us 4 answers: (5,0),(5,3),(5,6),(5,9). Answer: 4

Câu 20 Since all the trees' heights are integers tree 1 and tree 3 must have a height of 22. The next two trees' height therefore will have 3 possible cases: (11,22), (44,88), (44,22). The possible average that suits the 5 given possible answers is: 24.2. Answer: B

Câu 21 Answer: A



Câu 22 The final output is 1 so the value of the 6th number in order to obtain 1 is 2. And similarly, we can obtain the following sequence: The sum of all number possible numbers N is: $1 + 8 +$

$$\{1\} \to \{2\} \to \{4\} \to \{1, 8\} \to \{2, 16\} \to \{4, 5, 32\} \to \{1, 8, 10, 64\}$$

$10 + 64 = 83$. Answer: E

Câu 23 Two possible cases are made: one gets 3 awards and the other each gets 1 award; one gets 1 award and the other has 2 awards. Let consider each case:

Case 1: there are 3 ways to choose the one who gets 3 awards. And there are $\binom{5}{3} = 10$ ways to choose 3 awards from 5 awards and lastly, one person has 2 choices for awards. There are total:

$$3 \times 10 \times 2 = 60$$

ways.

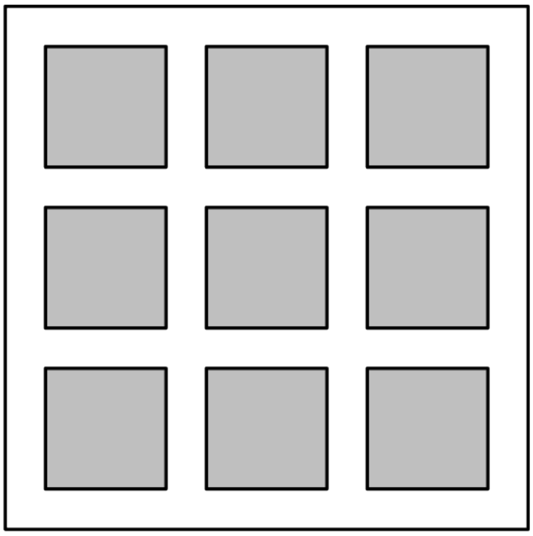
Case 2: 3 ways to choose the person who gets 1 award and 5 different choices for his award. Each person has 6 ways for their award so there are a total:

$$3 \times 5 \times 6 = 90$$

ways.

In total, there are 150 ways to give 5 different awards to 3 students. Answer: B

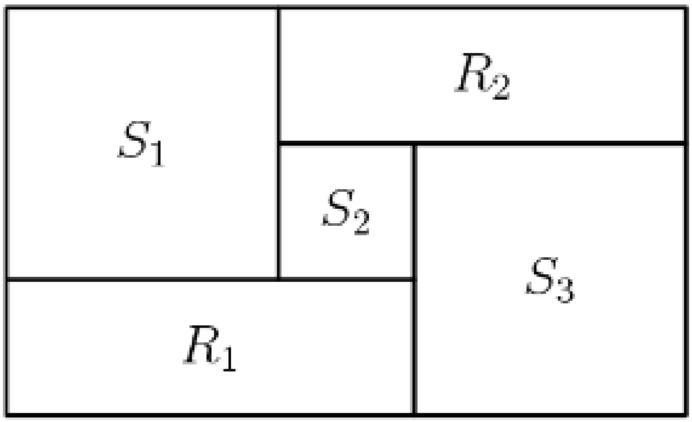
Câu 24 Without loss of generality, we may let $s = 1$ (since d will be determined by the scale of s, and we are only interested in the ratio $\frac{d}{s}$). Then, as the total area of the 576 gray tiles is simply 576, the large square has area $\frac{576}{0.64} = 900$, making the side of the large square $\sqrt{900} = 30$. As in Solution 1, the side length of the large square consists of the total length of the gray tiles and 25 lots of the border, so the length of the border is $d = \frac{30-24}{25} = \frac{6}{25}$. Since $\frac{d}{s} = d$ if $s = 1$, the answer is A.



Câu 25 Since, for each pair of rectangles, the side lengths have a sum of 3322 or 2020 and a difference of S_2, the answer must be:

$$\frac{3322 - 2020}{2} = \frac{1302}{2} = 651 .$$

Answer: A

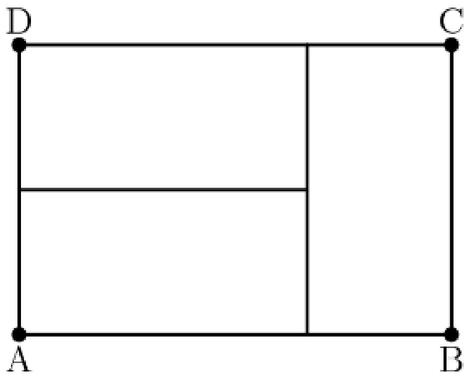


3.2.7 Đề ôn tập số 4:

Câu 1 Ike and Mike go into a sandwich shop with a total of 30.00 dollars to spend. Sandwiches cost 4.50 dollars each and soft drinks cost 1.00 dollars each. Ike and Mike plan to buy as many sandwiches as they can, and use any remaining money to buy soft drinks. Counting both sandwiches and soft drinks, how many items will they buy?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

Câu 2 Three identical rectangles are put together to form rectangle $ABCD$, as shown in the figure below. Given that the length of the shorter side of each of the smaller rectangles is 5 feet, what is the area in square feet of rectangle $ABCD$?

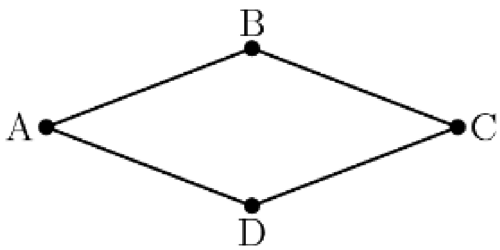


(A) 45 **(B)** 75 **(C)** 100 **(D)** 125 **(E)** 150

Câu 3 Which of the following is the correct order of the fractions $\frac{15}{11}, \frac{19}{15}$, and $\frac{17}{13}$, from least to greatest?

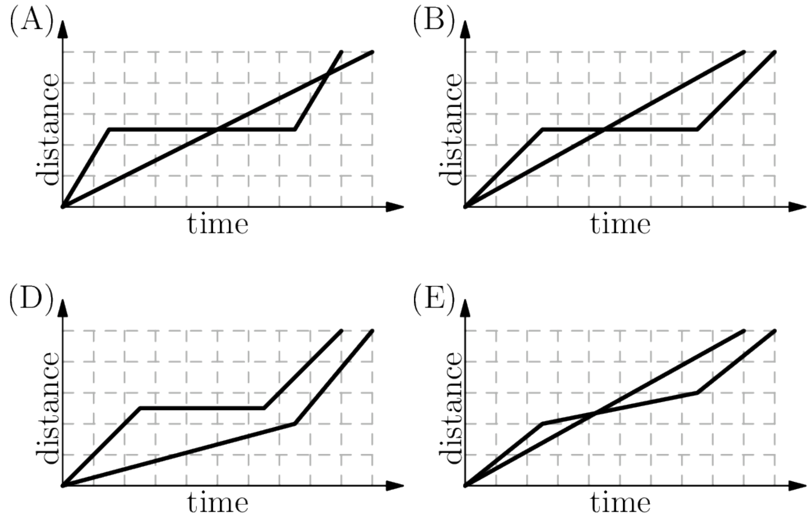
(A) $\frac{15}{11} < \frac{17}{13} < \frac{19}{15}$ **(B)** $\frac{15}{11} < \frac{19}{15} < \frac{17}{13}$ **(C)** $\frac{17}{13} < \frac{19}{15} < \frac{15}{11}$ **(D)** $\frac{19}{15} < \frac{15}{11} < \frac{17}{13}$ **(E)** $\frac{19}{15} < \frac{17}{13} < \frac{15}{11}$

Câu 4 Quadrilateral $ABCD$ is a rhombus with perimeter 52 meters. The length of diagonal $\overline{AC}$ is 24 meters. What is the area in square meters of rhombus $ABCD$?

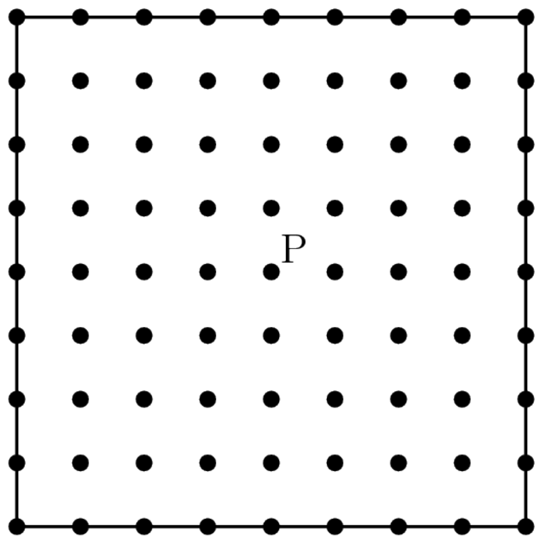


(A) 60 **(B)** 90 **(C)** 105 **(D)** 120 **(E)** 144

Câu 5 A tortoise challenges a hare to a race. The hare eagerly agrees and quickly runs ahead, leaving the slow-moving tortoise behind. Confident that he will win, the hare stops to take a nap. Meanwhile, the tortoise walks at a slow steady pace for the entire race. The hare awakes and runs to the finish line, only to find the tortoise already there. Which of the following graphs matches the description of the race, showing the distance d traveled by the two animals over time t from start to finish?



Câu 6 There are 81 grid points (uniformly spaced) in the square shown in the diagram below, including the points on the edges. Point P is in the center of the square. Given that point Q is randomly chosen among the other 80 points, what is the probability that the line PQ is a line of symmetry for the square?



(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{9}{20}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

Câu 7 Shauna takes five tests, each worth a maximum of 100 points. Her scores on the first three tests are 76, 94, and 87. In order to average 81 for all five tests, what is the lowest score she could earn on one of the other two tests?

(A) 48 **(B)** 52 **(C)** 66 **(D)** 70 **(E)** 74

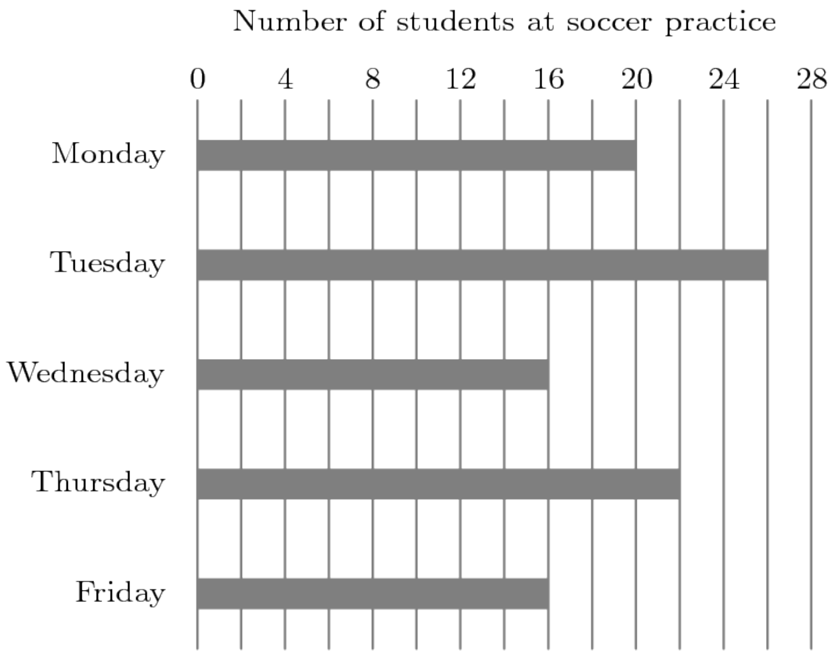
Câu 8 Gilda has a bag of marbles. She gives 20% of them to her friend Pedro. Then Gilda gives 10% of what is left to another friend, Ebony. Finally, Gilda gives 25% of what is now left in the bag to her brother Jimmy. What percentage of her original bag of marbles does Gilda have left for herself?

(A) 20 **(B)** $33\frac{1}{3}$ **(C)** 38 **(D)** 45 **(E)** 54

Câu 9 Alex and Felicia each have cats as pets. Alex buys cat food in cylindrical cans that are 6 cm in diameter and 12 cm high. Felicia buys cat food in cylindrical cans that are 12 cm in diameter and 6 cm high. What is the ratio of the volume of one of Alex's cans to the volume one of Felicia's cans?

(A) $1:4$ **(B)** $1:2$ **(C)** $1:1$ **(D)** $2:1$ **(E)** $4:1$

Câu 10 The diagram shows the number of students at soccer practice each weekday during last week. After computing the mean and median values, Coach discovers that there were actually 21 participants on Wednesday. Which of the following statements describes the change in the mean and median after the correction is made? **(A)** The mean increases by 1 and the median



does not change.

(B) The mean increases by 1 and the median increases by 1.

(C) The mean increases by 1 and the median increases by 5.

(D) The mean increases by 5 and the median increases by 1.

(E) The mean increases by 5 and the median increases by 5.

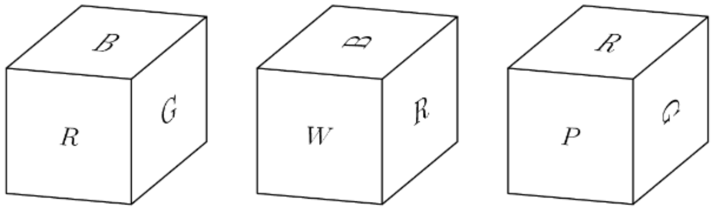
Câu 11 The eighth grade class at Lincoln Middle School has 93 students. Each student takes a math class or a foreign language class or both. There are 70 eighth graders taking a math class, and there are 54 eight graders taking a foreign language class. How many eight graders take only a math class and not a foreign language class?

(A) 16 **(B)** 23 **(C)** 31 **(D)** 39 **(E)** 70

Câu 12 The faces of a cube are painted in six different colors: red (R), white (W), green (G), brown (B), aqua (A), and purple (P). Three views of the cube are shown below. What is the color of the face opposite the aqua face?

(A) red **(B)** white **(C)** green **(D)** brown **(E)** purple

Câu 13 A palindrome is a number that has the same value when read from left to right or from right to left. (For example, 12321 is a palindrome.) Let N be the least three-digit integer which is not a palindrome but which is the sum of three distinct two-digit palindromes. What is the sum of the digits of N?



(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Câu 14 Isabella has 6 coupons that can be redeemed for free ice cream cones at Pete's Sweet Treats. In order to make the coupons last, she decides that she will redeem one every 10 days until she has used them all. She knows that Pete's is closed on Sundays, but as she circles the 6 dates on her calendar, she realizes that no circled date falls on a Sunday. On what day of the week does Isabella redeem her first coupon?

(A) Monday **(B)** Tuesday **(C)** Wednesday **(D)** Thursday **(E)** Friday

Câu 15 On a beach 50 people are wearing sunglasses and 35 people are wearing caps. Some people are wearing both sunglasses and caps. If one of the people wearing a cap is selected at random, the probability that this person is also wearing sunglasses is $\frac{2}{5}$. If instead, someone wearing sunglasses is selected at random, what is the probability that this person is also wearing a cap?

(A) $\frac{14}{85}$ **(B)** $\frac{7}{25}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{4}{7}$ **(E)** $\frac{7}{10}$

Câu 16 Qiang drives 15 miles at an average speed of 30 miles per hour. How many additional miles will he have to drive at 55 miles per hour to average 50 miles per hour for the entire trip?

(A) 45 **(B)** 62 **(C)** 90 **(D)** 110 **(E)** 135

Câu 17 What is the value of the product

$$\frac{1.3}{2.2} \times \frac{2.4}{3.3} \ldots \times \frac{98.100}{99.99}$$

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{50}{99}$ **(C)** $\frac{9800}{9801}$ **(D)** $\frac{100}{99}$ **(E)** 50

Câu 18 The faces of each of two fair dice are numbered 1, 2, 3, 5, 7, and 8. When the two dice are tossed, what is the probability that their sum will be an even number?

(A) $\frac{4}{9}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{5}{9}$ **(D)** $\frac{3}{5}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

Câu 19 In a tournament there are six teams that play each other twice. A team earns 3 points for a win, 1 point for a draw, and 0 points for a loss. After all the games have been played it turns out that the top three teams earned the same number of total points. What is the greatest possible number of total points for each of the top three teams?

(A) 22 **(B)** 23 **(C)** 24 **(D)** 26 **(E)** 30

Câu 20 How many different real numbers x satisfy the equation

$$(x^2 - 5)^2 = 16?$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 8

Câu 21 What is the area of the triangle formed by the lines $y = 5$, $y = 1 + x$, and $y = 1 - x$?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 16

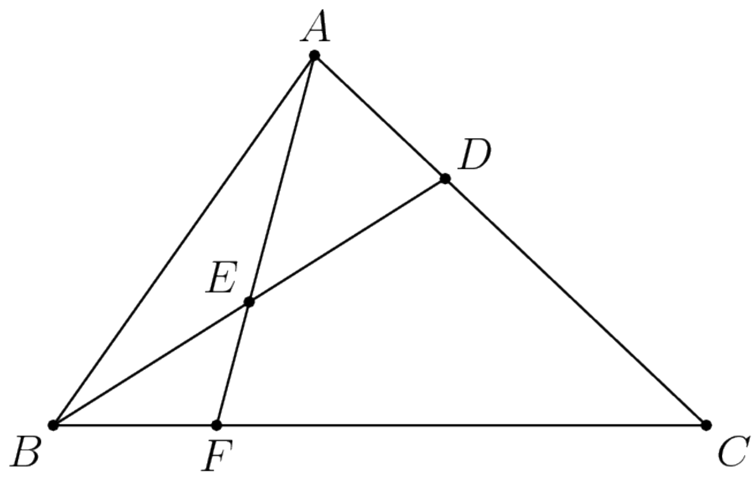
Câu 22 A store increased the original price of a shirt by a certain percent and then decreased the new price by the same amount. Given that the resulting price was 84% of the original price, by what percent was the price increased and decreased?

(A) 16 **(B)** 20 **(C)** 28 **(D)** 36 **(E)** 40

Câu 23 After Euclid High School's last basketball game, it was determined that $\frac{1}{4}$ of the team's points were scored by Alexa and $\frac{2}{7}$ were scored by Brittany. Chelsea scored 15 points. None of the other 7 team members scored more than 2 points. What was the total number of points scored by the other 7 team members?

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 13 **(E)** 14

Câu 24 In triangle ABC, point D divides side $\overline{AC}$ so that $AD : DC = 1 : 2$. Let E be the midpoint of $\overline{BD}$ and let F be the point of intersection of line BC and line AE. Given that the area of $\triangle ABC$ is 360, what is the area of $\triangle EBF$?



Câu 25 Alice has 24 apples. In how many ways can she share them with Becky and Chris so that each of the three people has at least two apples?

(A) 105 **(B)** 114 **(C)** 190 **(D)** 210 **(E)** 380

3.2.8 Lời giải cho đề ôn tập số 4:

.

Câu 1 The number of sandwiches is an integer and must be less or equal to $\dfrac{30}{4.5} = \dfrac{20}{3}$ so the maximum number of sandwiches he can buy is 6. With the remaining dollars, he can buy more than 3 sodas so the total number is: $6 + 3 = 9$ items. Answer: D

Câu 2 The area of ABCD is: $(5 \times 2) \times (5 \times 2 + 5) = 150$. Answer: E

Câu 3 When $\frac{x}{y} > 1$ and $z > 0$, $\frac{x+z}{y+z} < \frac{x}{y}$. Hence, the answer is E.

Câu 4 We have: $AB \times 4 = 52 => AB = 13.AE = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ so $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. The area of the rhombus is: $10 \times 12 = 120$. Answer: D

Câu 5 First, we know that the rabbit beats the tortoise in the first half of the race. So he is going to be ahead of the tortoise. We also know, while he rested, he didn't move. The answer hence is B.

Câu 6 Divide the grid into 4 4x5 quadrants. Each row of 5 points has 1 point on a horizontal/vertical line of symmetry + 1 point on a diagonal line of symmetry: $\dfrac{2}{5}$. Answer: C

Câu 7 The total points of the 2 tests are: $81 \times 5 - 76 - 94 - 87 = 148$. The maximum number of one test is 100, so the lowest of the other must be: $148 - 100 = 48$. Answer: A

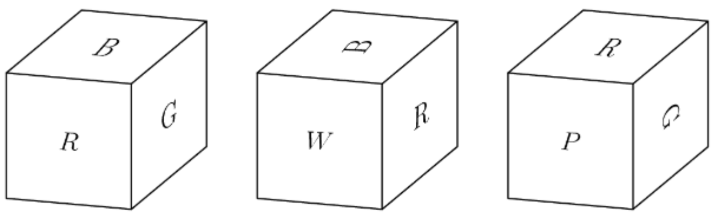
Câu 8 After Gilda gives 20 of the marbles to Pedro, she has 80 percent of the marbles left. If she then gives 10 percent of what's left to Ebony, she has $(0.8 * 0.9) = 72$ percent of what she had at the beginning. Finally, she gives 25 percent of what's left to her brother, so she has $(0.75 * 0.72) = 54$ percent of what she had in the beginning left.

Câu 9 Using the formula for the volume of a cylinder, we get that the volume of Alex's can is $3^2 \times 12 \times \pi$, and that the volume of Felicia's can is $6^2 \times 6 \times \pi$. Now, we divide the volume of Alex's can by the volume of Felicia's can, so we get $\frac{1}{2}$. Answer: B

Câu 10 Total increases by 5, so the average increases by 1. The initial median is 20, the following median is 21 so the median increases by 1. Answer: B

Câu 11 The number of students who take both classes is: $70 + 54 - 93 = 31$ So the number of graders that take only math classes is: $70 - 31 = 39$. Answer: D

Câu 12 Looking closely, we can see that all faces are connected with R except for A. Answer: R.



Câu 13 Two-digit palindrome numbers include numbers that are divisible by 11. So,therefore, N is divisible by 11. The smallest number that satisfies this condition is 110. We also have: $110 = 77 + 22 + 11$ so the smallest N is 110 and its sum of the digits is 2. Answer: 2

Câu 14 Let Sunday be Day 0, Monday be Day 1, Tuesday be Day 2, and so forth. We see that Sundays fall on Day n, where n is a multiple of seven. If Isabella starts using her coupons on Monday (Day 1), she will fall on a Day that is a multiple of seven, a Sunday (her third coupon will be "used" on Day 21). Similarly, if she starts using her coupons on Tuesday (Day 2), Isabella will fall on a Day that is a multiple of seven (Day 42). Repeating this process, if she starts on Wednesday (Day 3), Isabella will first fall on a Day that is a multiple of seven, Day 63 (13, 23, 33, 43, 53 are not multiples of seven), but on her seventh coupon, of which she only has six. So, the answer is C.

Câu 15 The number of people wearing caps and sunglasses is $\frac{2}{5} \cdot 35 = 14$. So then, 14 people out of the 50 people wearing sunglasses also have caps. Therefore the answer is $\dfrac{7}{25}$ or B

Câu 16 Let the additional miles he has to drive be x. The total distance of the road he has to ride is $15 + x$. We can therefore set the following equation based on the problem:

$$\frac{15+x}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{55}} = 50$$

So solving the equation gives us the answer of 110. Answer: D

Câu 17 We can rewrite:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3}\right)\left(\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 4}\right) \cdots \left(\frac{99 \cdot 98}{98 \cdot 99}\right) \cdot \frac{100}{99}$$

All the terms are canceled, and therefore we can obtain the results of:

$$\frac{1.100}{2.99} = \frac{50}{99}$$

Answer: B

Câu 18 To obtain a sum that is odd, the two numbers must be odd-even or even-odd. The chance of obtaining an odd is $\dfrac{2}{3}$ and the chance of obtaining an even is $\dfrac{1}{3}$. So to get odd, the chance is $\dfrac{4}{9}$. So answer is $\dfrac{5}{9}$. Answer: C

Câu 19 We can name the top three teams as A, B, and C. We can see that (respective scores of) $A = B = C$ because these teams have the same points. If we look at the matches that involve the top three teams, we see that there are some duplicates: AB, BC, and AC come twice. In order to even out the scores and get the maximum score, we can say that in a match AB, A, and B each win once out of the two games that they play. We can say the same thing for AC and BC. This tells us that each team A, B, and C win and lose twice. This gives each team a total of $3 + 3 + 0 + 0 = 6$ points. Now, we need to include the other three teams. We can label these teams as D, E, and F. We can write down every match that A, B, or C plays in that we haven't counted yet: AD, AD, AE, AE, AF, AF, BD, BD, BE, BE, BF, BF, CD, CD, CE, CE, CF, and CF. We can say A, B, and C win each of these in order to obtain the maximum score that A, B, and C can have. If A, B, and C win all six of their matches, A, B, and C will have a score of 18. Answer: 24 or C

Câu 20 The equation given is equivalent to:

$$(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)=0$$

Therefore, there are total of 4 solutions. Answer: D

Câu 21 $y=x+1$ and $y=-x+1$ have y-intercepts at $(0,1)$ and slopes of 1 and -1, respectively. Since the product of these slopes is -1, the two lines are perpendicular. From $y=5$, we see that $(-4,5)$ and $(4,5)$ are the other two intersection points, and they are 8 units apart. By symmetry, this triangle is a $45-45-90$ triangle, so the legs are $4\sqrt{2}$ each and the area is

$$\frac{(4.\sqrt{2})^2}{2}=16$$

Answer: A

Câu 22 Suppose the fraction of the discount is x. That means $(1-x)(1+x)=0.84$; so, $1-x^2=0.84$, and $(x^2)=0.16$, obtaining $x=0.4$. Therefore, the price was increased and decreased by 40 percent. Answer: E

Câu 23 Starting from the above equation $\frac{t}{4}+\frac{2t}{7}+15+x=t$, where t is the total number of points scored and $x\leq 14$ is the number of points scored by the remaining 7 team members, we can simplify to obtain the Diophantine equation $x+15=\frac{13}{28}t$, or $28x+28\cdot 15=13t$. Since t is necessarily divisible by 28, let $t=28u$ where $u\geq 0$ and divide by 28 to obtain $x+15=13u$. $u=2$, $t=56$ and $x=11$. Answer: B

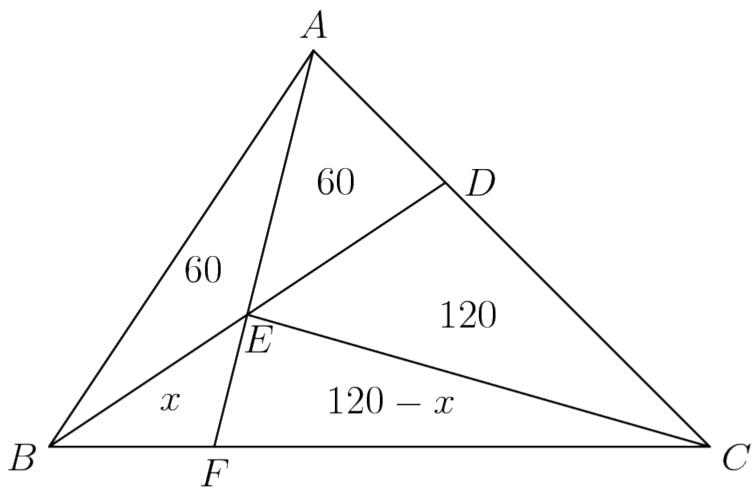
Câu 24 As before, we figure out the areas labeled in the diagram. Then, we note that

$$\frac{EF}{AE}=\frac{x}{60}=\frac{120-x}{180}$$

Even simpler:

$$\frac{EF}{AE}=\frac{x}{60}=\frac{120}{240}$$

. Hence, $x=30$.



Câu 25 Students should read about Euler's candy problem, which is one of the most famous candy distribution problems. Read more at: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Ball-and-urn The answer therefore is C. Answer: C

Chương 4

International Mathematical and Science Olympiad (IMSO) :

4.1 Giới thiệu kì thi:

4.1.1 Mở đầu:

Kì thi Olympic Toán và Khoa học trẻ quốc tế (International Mathematics and Science Olympiad for Primary School – viết tắt là IMSO) là một trong các cuộc thi toán quốc tế dành cho học sinh tiểu học và trung học dưới 13 tuổi trên toàn thế giới. Kỳ thi Olympic Toán học và Khoa học quốc tế là sân chơi quốc tế rất có uy tín và bổ ích, tạo điều kiện cho học sinh dưới 13 tuổi từ nhiều quốc gia có cơ hội giao lưu và phát triển khả năng về Toán học, Khoa học. Kì thi không chỉ đơn thuần là kiểm tra kiến thức lý thuyết mà còn thử thách khả năng sáng tạo của các bạn học sinh. Do đó, phương châm của kỳ thi là đề cao giá trị của sự thông minh, sáng tạo và kích thích sự hứng thú của học trò sinh với Toán và Khoa học. Với những ý nghĩa sâu sắc, thiết thực, bài thi bổ ích, mang tính phân loại và đánh giá cao cùng với sự tổ chức chuyên nghiệp, IMSO được đánh giá là kì thi uy tín nhất dành cho học sinh dưới 13 tuổi. Kỳ thi ngày càng tạo được sức lan tỏa, ngày càng có nhiều quốc gia, vùng lãnh thổ trên thế giới tham dự.

4.1.2 Lịch sử :

- Năm 2021 Kỳ thi IMSO diễn ra trong bốn ngày từ 21/1 – 24/1, do Indonesia làm chủ nhà. Vì dịch COVID19 diễn biến phức tạp, thí sinh dự thi IMSO 2021 thi ngay tại quốc gia mình vào cùng một khung giờ, được truyền hình trực tiếp tại tất cả các nước. Số nước tham dự năm 2021 cũng giảm, chỉ còn 15 quốc gia và vùng lãnh thổ. Sau 3 ngày thi, đoàn Việt Nam xuất sắc mang về 2 Huy chương Vàng, 5 Huy chương Bạc, 4 Huy chương Đồng ở môn Toán học. Với môn Khoa học, đoàn học sinh Việt Nam giành 5 Huy chương Bạc và 4 Huy chương Đồng.

4.1.3 Các thí sinh hợp lệ:

- Các bạn học sinh dưới 13 tuổi có niềm đam mê Toán và Khoa học muốn thử sức các cuộc thi Toán – Khoa học Tiếng Anh Quốc tế lớn. Các thí sinh sẽ được kiểm tra qua các vòng để chọn vào đội tuyển và mỗi quốc gia sẽ đề cử 12 thí sinh tham gia (6 thí sinh đội tuyển Toán, 6 thí sinh đội tuyển Khoa học). Nhưng cũng có những năm, ở từng quốc gia, số thí sinh được lựa chọn nhiều hơn 12.

4.1.4 Đề thi và bài làm:

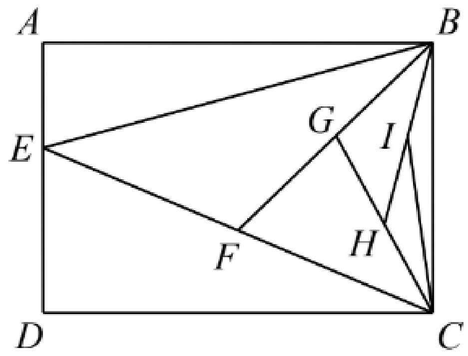
- Đề thi: Cấu trúc đề của cuộc thi IMSO gồm có 2 phần là Toán và Khoa học, trong đó đề thi Toán yêu cầu tổng thời gian làm bài là 270 phút. Đề thi Toán gồm 3 phần: Trắc nghiệm yêu cầu viết đáp số (25 bài/60 phút, mỗi câu đúng được 1.0 điểm); Tự luận (13 bài/90 phút, mỗi câu đúng tối đa 3.0 điểm) và Khám phá (6 bài/120 phút, mỗi bài đúng tối đa 6.0 điểm). Câu hỏi, hướng dẫn trong đề đều bằng tiếng Anh. Trong quá trình thi, thí sinh không được sử dụng từ điển tiếng Anh, khoa học, máy tính cầm tay hoặc các thiết bị điện tử khác.

4.2 Các đề ôn tập:

4.2.1 Đề ôn tập số 1:

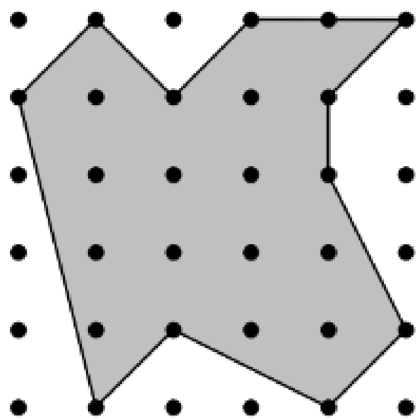
Câu 1 A job at Hai Liang Education Park can be done by Alex alone in 6 hours and by Bob alone in 10 hours. Alex works on the job for one hour alone, then Bob continues to work on the job for one hour alone. If they repeat the pattern, in how many hours can the job be done? Express your answer as a common fraction.

Câu 2 In the figure below, E is a point on side AD of rectangle ABCD. Points F, G, H and I are midpoints of CE, BF, CG and BH respectively. If the area of triangle BCI is $1cm^2$, find the area of rectangle ABCD, in cm^2.



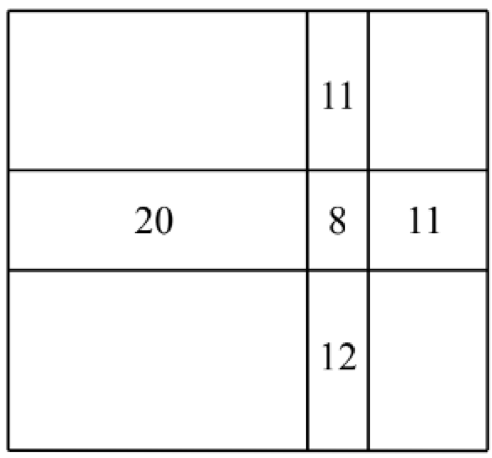
Câu 3 In a sequence, the first two terms are 64 and 36. Each subsequent term is the average of the preceding terms. Find the sum of the first 2018 terms.

Câu 4 In the figure shown, the distance between adjacent dots in each row and each column is 1 cm. What is the area of the shaded region, in cm^2?



Câu 5 For any positive integer n, we define the function f(n) to be the sum of the digits of n and the number of digits of n. For example,
f (218) = 2 +1 + 8 + 3 = 14. (Note: The first digit of n, reading from left to right, cannot be 0). What is the sum of maximum and minimum values of n such that f(n)= 6?

Câu 6 A rectangle is divided into 9 smaller portions as shown in the figure below. The perimeter, in cm, of the 5 known portions are also given. Find the perimeter, in cm, of the original rectangle.



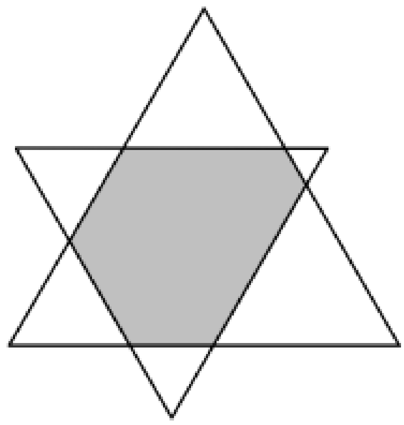
Câu 7 A cylindrical water tank, with diameter 2.8 m and height 4.2 m, is filled in by a pipe of diameter 7 cm, through which water flows at the rate of 4 m/sec. How many minutes will it take for the pipe to completely fill the tank? (Take $\pi = \dfrac{22}{7}$)

Câu 8 We want to divide a square into obtuse triangles such that every two triangles meet at a common vertex or at a common edge or are disjoint. At least how many triangles can we have?

Câu 9 What is the last digit of $12^{2018} + 14^{2018} + 16^{2018} + 18^{2018} + 20^{2018} + ... + 2014^{2018} + 2016^{2018} + 2018^{2018}$

Câu 10 How many 3-digit positive integers have the property that the product of all of its digits is equal to 18?

Câu 11 Two overlapped equilateral triangles are shown in the figure below. The sides of each triangle are parallel to the sides of the other. The perimeter of the two triangles are 744 cm and 930 cm, respectively. What is the perimeter, in cm, of shaded hexagon?



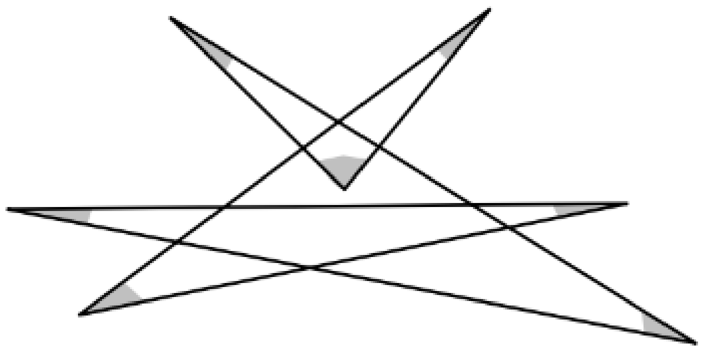
Câu 12 Sunny got three boxes from his father, which contained some number of marbles. His father said that the number of marbles inside the first, second and third boxes are three consecutive integers in increasing order and that they are divisible by 5, 7 and 9 respectively. What is the minimum total number of marbles inside the three boxes?

Câu 13 Given is the sequence 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, ... , where the nth term after the 3rd term is the sum of three previous terms. For example, the 4th term is 1 + 1 + 1= 3 and the 5th term is 1 + 1 + 3= 5. What is the remainder when the 2018th term is divided by 8?

Câu 14 If the eight-digit number 2 0 1 8 M N 2 8 is divided by 7, the remainder is 5. If the same eight-digit number is divided by 11, the remainder is 9. Find the largest possible value of the two-digit number M N .

Câu 15 Let I, M, S and O represent different digits and the sum of IMSO, ISMO, OMSI, OSMI, MISO, MOSI, SIMO and SOMI is equal to 60012. What is the sum of I + M + S + O?

Câu 16 Find the sum of all the shaded angles, in degrees, of the figure shown below.



Câu 17 In the following 5 x 5 square grid, the numbers 1, 2, 3, 4 and 5 are filled in, such that each number appears only once in each row and only once in each column. Find the number filled in the shaded square.

1	2			
				1
		4		
2		5		
	5			4

Câu 18 We place 2018 distinct points inside a square, then divide the square into triangles, whose vertices are those 2018 points and the 4 vertices of the square. (that is we have 2022 points in total, which are vertices of the triangles). For each triangle, each point is either one of its vertices or lies completely outside the triangle itself. In how many triangles has the square been divided?

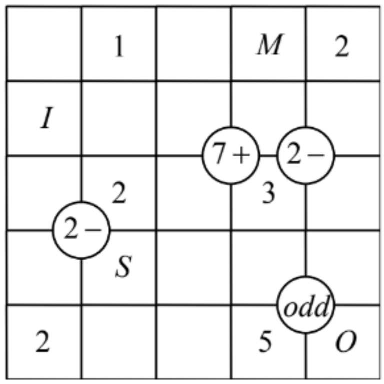
Câu 19 In the figure shown below, each empty white cell is filled with an integer from 1 to 9. Each number is used at most once. The gray cell is filled with a sign shown below . In each line with 3 numbers, the calculation is from left to right. In the last column, the calculation is from top to bottom. Show one possible solution.

	−		=	
				×
	÷		=	
				=
			=	

Câu 20 In the grid below, each letter represents a different integer from 1 to 7. When comparing the sum of the numbers in any row or column to that of any other rows or columns, the two sums must be of the same parity (either both even or both odd) and differ by at most 2. Find the sum of all possible values of a.

a	b	
c	d	e
	f	g

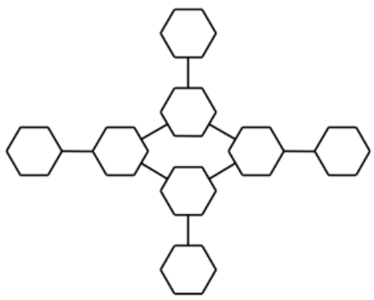
Câu 21 Mathrix is a 5 x 5 puzzle game where we place the digits from 1 to 5 in the board such that each row and column contain the digits from 1 to 5 exactly once. Circles with conditions are placed on some intersections and are meant for the 2 pairs of diagonally adjacent cells. This can be the sum (+), difference (-) or only odd numbers can be used (odd). (For example if we have +5 this means that the sum of the two diagonally adjacent numbers is 5). Find the value of I + M + S + O.



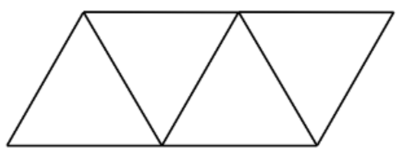
Câu 22 It is known that $\overline{AMMM}$ and $\overline{MMMB}$ are two 4-digit numbers, where A,B,M are different digits. If $\dfrac{\overline{AMMM}}{\overline{MMMB}} = \dfrac{2}{5}$, find the value of A+B+M

Câu 23 What is the units' digit of the expression below:
$-1 \times 2018 + 2 \times 2017 - 3 \times 2016 + ... - 1003 \times 1006 + 1004 \times 1005$

Câu 24 Each hexagon is coloured either red, yellow or blue, such that no two hexagons connected by a line segment have the same colour. In how many different ways can we colour the figure?



Câu 25 In the figure shown below, colour each of the equilateral triangles with any one of 4 colours: blue, yellow, green or red so that no two triangles will have the same colour. How many different possible ways of colouring the figure are there? (Two ways of colouring the figure are considered the same if we can obtain one colouring from another by rotating the entire figure, reflecting the figure however counts as a different colouring.)



4.2.2 Lời giải cho đề ôn tập số 1:

.

Câu 1 Trong 1 giờ Alex có thể làm được $\frac{1}{6}$ giờ, Bob làm được $\frac{1}{10}$ công việc từ đó ta có bảng 2 người đã làm được. Cứ 2 tiếng thì họ sẽ hoàn thành:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = 4/15$$

công việc

Sau 6 tiếng luôn phiên, họ sẽ hoàn thành $\frac{12}{15}$ công việc và 7 tiếng họ sẽ hoàn thành $\frac{29}{30}$ công việc. Sau thêm $\frac{1}{3}$ giờ thì Bobo hoàn thành thêm $\frac{1}{30}$ nốt công việc cuối cùng. Đáp số: $\frac{22}{3}$

Câu 2 Diện tích tam giác BCI là $1cm^2$ và vì có I,H,G,F là trung điểm các cạnh BH,GC,BF,EC nên diện tích tam giác BEC là $16cm^2$. Do đó diện tích hình chữ nhật ABCD là $32cm^2$. Đáp số: $32cm^2$

Câu 3 Số thứ 3 là 50 và kể từ số thứ 3, trung bình các số sau đều là 50 không đổi. Tổng 2018 số đầu tiên là: $50 \times 2016 + 64 + 36 = 100900$. Đáp số: 100900

Câu 4 Ta dùng bù trừ để tính những phần không tô đậm trong hình vuông ($8cm^2$), diện tích hình vuông là $25cm^2$ nên diện tích tô đậm là $17cm^2$.

Câu 5 Số lớn nhất thỏa mãn: 10000

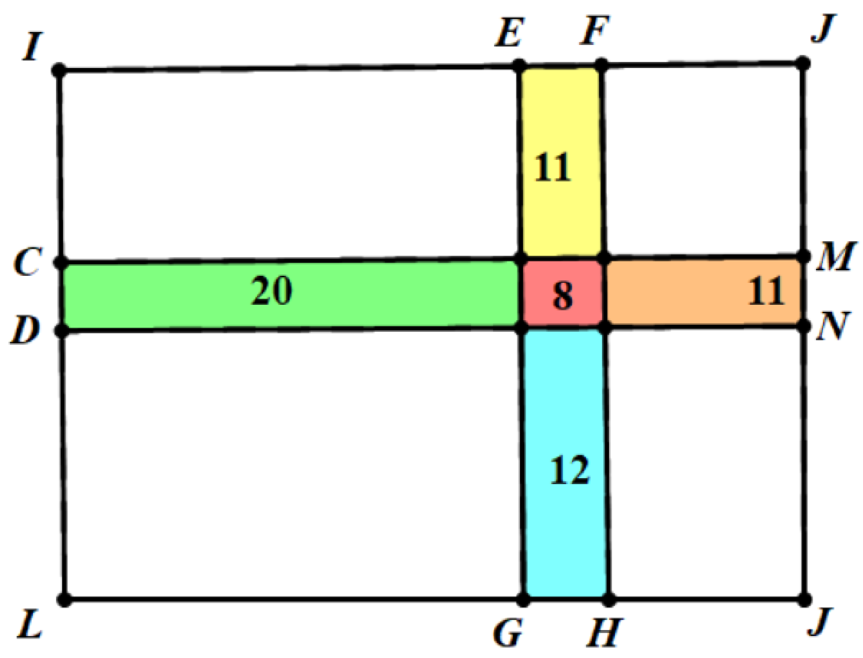
Số nhỏ nhất thỏa mãn: 5 Đáp số: Tổng = 10005

Câu 6 Đặt tên các đỉnh như hình dưới. Đặt $CD = MN = x$, $EF = GH = y$, $IL = JK = a$, $IJ = LK = b$. Ta có:

$6x + 2b = 20 + 8 + 11$

$6y + 2a = 11 + 8 + 12$

Lại có 2(x+y) là chu vi hình giữ nhật ở giữa nên $x + y = 4$, từ đó $2(a + b) = 46$. Đáp số: 46



Câu 7 Thể tích thùng chứa nước là:

$$\frac{22}{7} \times 2,82 \times 4,2 = 103,488 m^3$$

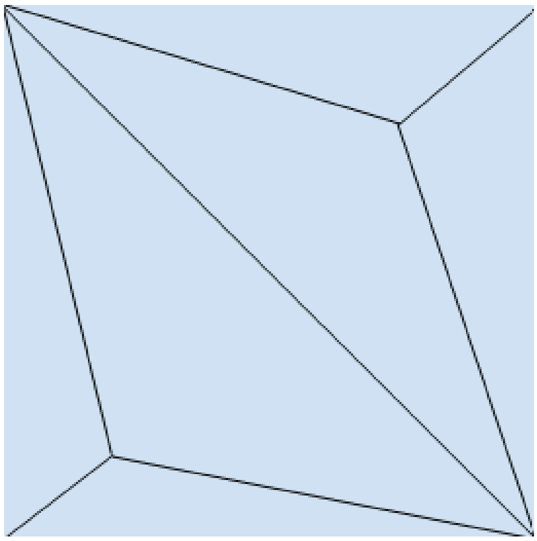
Mặt khác do 7 cm = 0,07 m nên trong 1 giây thì lượng nước chảy qua ống là:

$$\frac{22}{7} \times 0.07^2 \times 4 = 0.0616 m^3$$

Vậy thời gian để vòi nước chảy làm đầy bình là:

$\frac{103,488}{0.0616} = 1680$(giây) hay 28 phút.

Câu 8 Đáp số: 6



Câu 9 2018 chia 4 dư 2 ta có thể xét:

$2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{10}$ $4^{4k+2} \equiv 6 \pmod{10}$ $6^{4k+2} \equiv 6 \pmod{10}$ $8^{4k+2} \equiv 4 \pmod{10}$ Tổng 4 số liên tiếp tận cùng là 0, nên tổng S có tận cùng là 0. Đáp số: 0

Câu 10 Các số có 3 chữ số mà tích các chữ số bằng 18 là: 129, 192, 219, 291, 912, 921, 136, 163, 316, 361, 613, 631, 233, 323, 332 Đáp số: 15

Câu 11 Để ý rằng tổng chu vi 6 tam giác trắng trong hình cũng chính là tổng chu vi hai hình tam giác đều to nhất. (1)

Xét 1 trong các tam giác đều trắng, gọi là ABC như trên. Do BC song song với DE nên LABC = LACB = 60°. Do đó tam giác ABC đều, dẫn đến chu vi tam giác ABC bằng 3 lần độ dài BC.

Làm tương tự cho các tam giác trắng còn lại, ta suy ra được rằng tổng chu vi 6 tam giác trắng bằng 3 lần chu vi hình lục giác tô đậm. (2)

Từ (1) và (2), chu vi lục giác tô đậm là:

$$\frac{1}{3} \times (744 + 930) = 558$$

.

Đáp số: 558

Câu 12 Gọi x là số bi hộp đầu, khi đó $x + 1$ và $x + 2$ là số bi trong hộp thứ 2 và hộp thứ 3. Ta có:

$x \equiv 0 \pmod 5$

$x + 1 \equiv 0 \pmod 7$

$x + 2 \equiv 0 \pmod 9$
Ta thấy, từ 3 điều kiện trên, ta thấy sẽ đi tìm 1 số chia hết cho 5, chia 7 dư 6 và chia 9 dư 7. Số nhỏ nhất thỏa mãn là 155, từ đó ta thấy $x + 155 \equiv 0 \pmod{315}$. Vậy x nhỏ nhất có giá trị là 160. Tổng số bi 3 hộp từ đó là 483. Đáp số: 483

Câu 13 Đồng dư của 8 lặp lại theo chu kì 8, 2018 chia 8 dư 2 nên số dư của nó sẽ là 1. Đáp số: 1

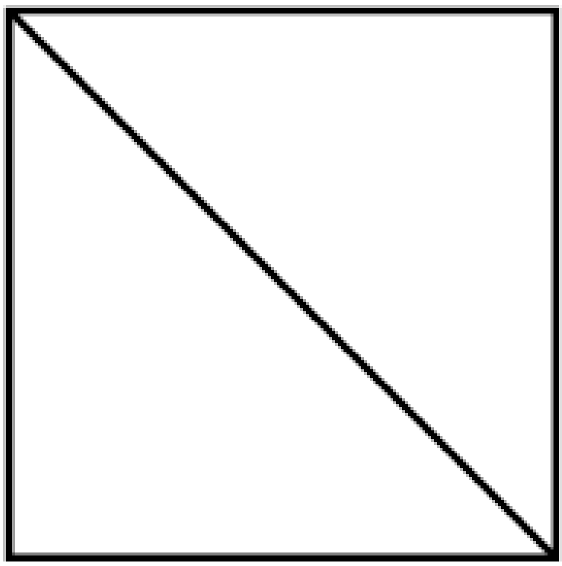
Câu 14 Ta có $\overline{2018MN28}$ chia 11 dư 9 nên $\overline{2018MN19}$ chia hết cho 11. Từ đó ta thấy $2 + 1 + M + N - 0 - 8 - N - 9$ chia hết cho 11 hay $M - N$ chia 11 dư 2. Chọn M,N sao cho số đã cho chia 7 dư 5, ta thấy $\overline{MN} = 86$ là thỏa mãn và lớn nhất. Đáp số: 86

Câu 15 Tổng của 8 số là 2204(I+O)+2240(M+S)=60012 hay 2204(I+M+S+O)=60012-36(I+O). Trong các số chia hết cho 2204 chỉ có 59508 là gần nhất 60012 và chia hết 2204. Do đó dễ tính được I+M+S+O=27. Đáp số: 27

Câu 16 Cộng tổng các góc đưa về tam giác to nhất ở giữa, ta sẽ được tổng các góc thỏa mãn đề bài là 180. Đáp số: 180

Câu 17 Đánh số lần lượt các hàng là 1,2,3,4,5 và các cột là a,b,c,d,e. Ta thấy a_1, a_3, a_4, a_5 không thể là 4 nên $a_2 = 4$. a_5 không thể 5 nên $a_5 = 3$, $a_3 = 5$. Xét cột thứ 3 dễ thấy 1 phải nằm ở vị trí c_5, và từ đó 3 phải nằm vị trí c_1 và 2 phải nằm ở vị trí c_2. Điền xong 2 cột ta sẽ dễ xác định một cách tương tự rằng ô ở vị trí tô đậm sẽ có giá trị là 1. Đáp số: 1

Câu 18 Sau đó với mỗi điểm mới mà ta tạo thêm thì nó sẽ nằm hoàn toàn bên trong một tam giác có sẵn, đồng thời chia tam giác đó thành ba tam giác khác tương tự.



Nói cách khác, mỗi điểm mới mà ta thêm sẽ làm tăng số tam giác thêm 2 Vậy số tam giác được tạo thành bởi hình vuông và 2018 điểm bên trong nó là:

$$2 + 2018 \times 2 = 4038$$

.

Đáp số: 4038

Câu 19 Lời giải bài toán:

9	−	5	=	4
				×
6	÷	3	=	2
				=
7	+	1	=	8

9	−	5	=	4
				×
6	÷	3	=	2
				=
1	+	7	=	8

Câu 20 Đặt tên các cột là 1,2,3; các hàng là a,b,c. Do tổng các số trong 3 cột là 28 (số chẵn) và tổng của từng số trong mỗi cột 1, 2, 3 cùng tính chẵn lẻ nên tổng của các số trong từng cột đều là số chẵn.

Mặt khác, 2 cột bất kì có chênh lệch giữa tổng các số trong mỗi cột không quá 2. Từ đây ta tính được tổng của các số trong mỗi cột chỉ có thể là 8 hoặc 10. Chứng minh tương tự thì tổng các số trong mỗi hàng chỉ là 8 hoặc 10. Nếu $a = 1$ thì b và c chỉ có thể là 7 (do $b, c \equiv 0(\text{mod } 7)$) và $a + b$ và $a + c$ chỉ nhận 1 trong 2 giá trị 8 hoặc 10 Điều này vô lí do b khác c. Tương tự ta cũng chứng minh được$a = 2$ vô lí. Nếu $a = 4$ thì do b, c không thể bằng 4 nên $a + b$ và $a + c$ chỉ có thể là 10

$=> b = c = 6$ (vô lí). Chứng minh tương tự ta loại được trường hợp $a = 5$. Với các trường hợp còn lại, ta đều chỉ ra được bảng thoả mãn bài toán

Câu 21 Đáp số: 13. Bạn đọc tự thử tìm hướng giải.

Câu 22 Do $\dfrac{\overline{AMMM}}{\overline{MMMB}}$ nên $\overline{AMMM} \equiv 0(\text{mod } 2)$ do đó M là chữ số chẵn. Tương tự ta có $\overline{MMMB}$ chia hết cho 5, thử các trường hợp $\overline{MMMB}$ chỉ có $M = 2, B = 6, A = 5$. Do đó $A+B+M = 13$

Câu 23 Ta thấy kết quả biểu thức đã cho có cùng chữ số hàng đơn vị với giá trị biểu thức sau: $A = 100 \times (-1 \times 8 + ... + 10 \times 9) - 1 \times 8 + 2 \times 7 - 3 \times 6 + 4 \times 5$ Vậy chữ số tận cùng A là 8

Câu 24 Với mỗi cách tô màu 4 hình lục giác ở trong, ta có thể tạo ra 16 cách tô các hình lục giác bên ngoài. Cụ thể, ở mỗi hình lục giác ngoài, ta có thể dùng 2 màu không trùng với màu của hình lục giác bên trong mà nó tiếp xúc; do đó có:

$$2^4 = 16$$

cách tô

Giờ xét 4 ngũ giác ở trong, ta thấy TH1 nếu dùng 2 màu, có 3 cặp màu và 2 cách tô mỗi cặp tạo nên 6 cặp khác nhau. TH2 dùng 3 màu, 1 màu tô 2 lần 2 lục giác đối diện và 2 màu tô bất kì nên do đó có tổng cộng $2 \times 3 \times 2 = 12$ cách tô 3 màu. Từ đó số cách tô cả hình là:

$$16 \times (12 + 6) = 288$$

cách tô.

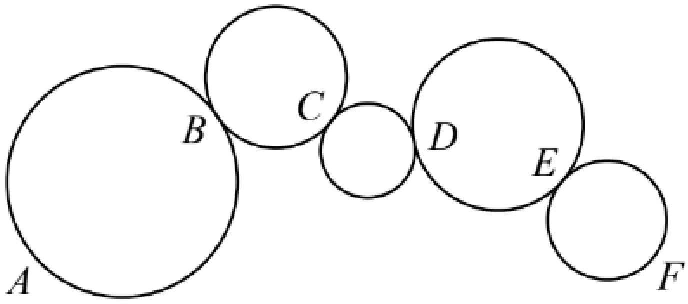
Câu 25 Nếu tô như bình thường sẽ thu được 24 cách, tuy nhiên ta có thể thấy mỗi cách tô bị lặp lại 2 lần nên số cách tổng cộng là:

$\dfrac{24}{2} = 12$ cách

4.2.3 Đề ôn tập số 2:

Câu 1 1. Find the smallest positive integer n such that the three numbers: $n - 96$, n and $n + 96$ are positive prime numbers

Câu 2 The figure below shows five circles touching each other at points B, C, D and E. Points A and B are two different points on the leftmost circle. Points E and F are two different points on the rightmost circle. An ant wants to crawl from A to F along part of the circumference of the circles. If the ant is only allowed to crawl along any parts of the circumference of the circles at most once, how many possible paths can the ant take to crawl from A to F?



Câu 3 Alex spent a total of 119 dollars in 7 days. Each day, he spent 4 dollars more than the previous day. How much did Alex spend on the $6th$ day?

Câu 4 A sequence of numbers is added in the following way: For example, for the sequence 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... , all the numbers in the sequence are first written as decimals as shown below and then added up together.

0.1

0.02

0.003

0.0004

0.00005

0.000006

0.0000007

0.00000008

0.000000009

0.0000000010

0.00000000011

0.000000000012

= 0.123456790123

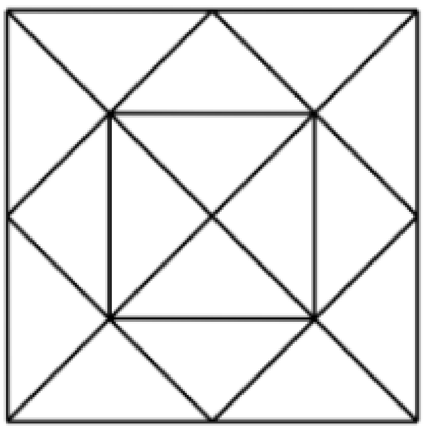
What is the result when the sequence 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, ... is added up in the same way?

Câu 5 A positive integer is lucky if each digit in its base-ten representation, starting from the leftmost digit, is not more than the digit on its right. For example, 79, 335 and 679 are lucky numbers but 41, 523 and 786 are not. A super-lucky number is a lucky number with 8 in its ones place and whose square is also lucky. Find the smallest super-lucky number.

Câu 6 Harry, Larry and Parry were each given some marbles on Monday.
On Tuesday, Harry gave Larry and Parry some marbles so that Larry and Parry each ended up with 4 times their original number of marbles.
On Wednesday, Larry gave Harry and Parry some marbles so that Harry and Parry each ended up with 3 times the number of marbles they had on Tuesday.
On Thursday, Parry gave Harry and Larry some marbles so that Harry and Larry each ended up with twice the number of marbles they had on Wednesday.
If Harry, Larry and Parry ended up with 48 marbles each on Thursday, how many marbles did Parry have on Monday?

Câu 7 Form 9-digit numbers using each of the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9 exactly once. Let A and B be two such numbers with $B = 8A$. Find the sum of the digits of the number $A + B$

Câu 8 Straight lines are used to divide a square into identical regions as shown in the figure below. How many triangles are there in the figure?



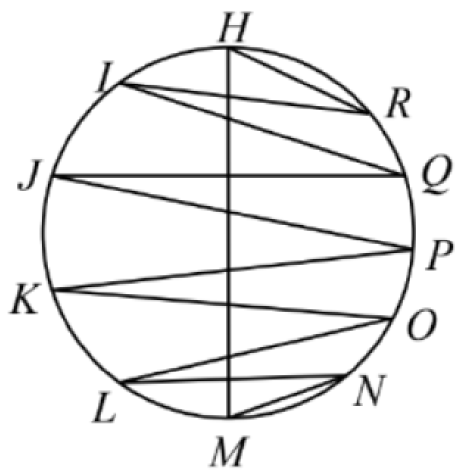
Câu 9 A sculptor wanted to carve a statue from a piece of marble. On the first week, the sculptor carved out 35% of the original piece of marble. On the second week, he carved out 20% of what was left, and on the third week, he carved out 25% of the remaining block to complete the statue. The weight of the completed statue is 48.75 kg. What was the weight, in kg, of the original piece of marble?

Câu 10 Find the greatest 10-digit positive integer that is divisible by 36 and in which each of the digits 0 to 9 appears exactly once.

Câu 11 Jack wants to climb up a 26-step staircase. He is only allowed to take 2 or 4 steps for each move. In how many different ways can he climb up to the top of the staircase with exactly 8 moves?

Câu 12 What number should be subtracted from the numerator of the fraction $\frac{537}{463}$ and added to the denominator so that the resulting fraction is equal to $\frac{1}{9}$?

Câu 13 In the figure below, H, I, J, ... , Q and R are 11 points on the circle such that $HI = IJ = JK = KL = LM$ and $NO = OP = PQ = QR$. If HM is the diameter of the circle, find the total measure, in degrees, of $\angle HRI$, $\angle IJQ$, $\angle JPK$, $\angle KOL$ and $\angle LNM$.

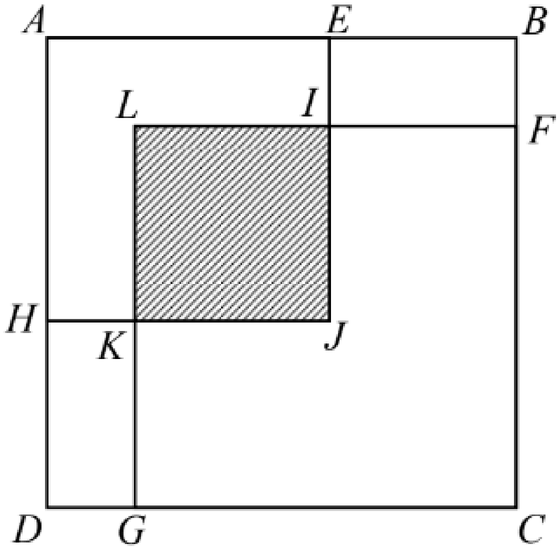


Câu 14 A palindrome is a number which remains the same when its digits are written in the reverse order. For example, 131 is a palindrome. A car's odometer reads 16961 km. How much further should the car travel in kilometers before the odometer reads the next palindrome?

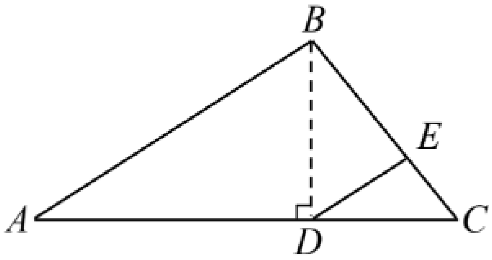
Câu 15 If $\overline{abcdef}$ represents a 6-digit number, where a, b, c, d, e and f denote different digits, what is the largest possible value of $\overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{cde} + \overline{def}$?

Câu 16 Alvin and Charles both walk from Town Q to Town M at a speed of 4.8 km/h and 5.4 km/h respectively. Bob cycles from Town M to Town Q at a speed of 10.8 km/h. If all three of them start at the same time, Alvin will meet Bob 5 minutes after Charles meets Bob. How many minutes will Bob take to travel from Town M to Town Q?

Câu 17 In the figure below, square AEJH and square FCGL overlap to form the shaded square KJIL. The area of KJIL is $\frac{1}{4}$ the area of FCGL and $\frac{4}{9}$ area of AEJH. What fraction of the square ABCD is shaded?



Câu 18 In the figure below, D is a point on the line AC such that BD is perpendicular to AC. Point E is on the line BC such that AB is parallel to DE. The area of $\triangle CDE$ is 9 cm^2. Given that $BD = 8$cm and $DC = 6$ cm, find the length, in cm, of AD.



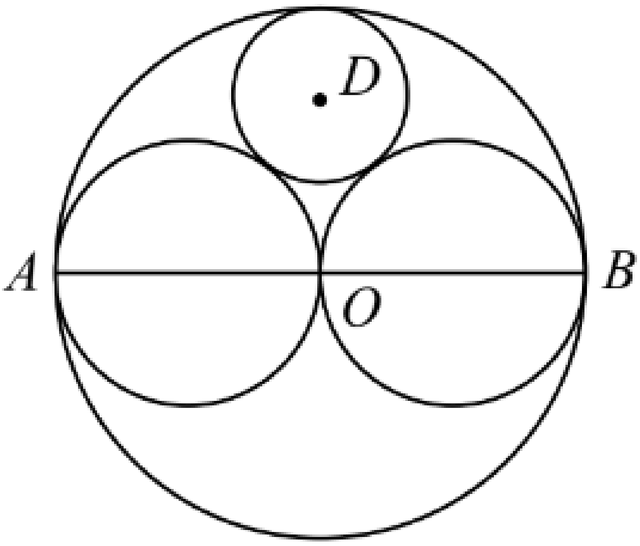
Câu 19 A, B and C are positive integers. The sum of 160 and the square of A is equal to the sum of 5 and the square of B. The sum of 320 and the square of A is equal to the sum of 5 and the square of C. Find the positive integer A.

Câu 20 Eight positive integers are arranged in a row as shown below.

2017, a,b,c,d,e,f,g

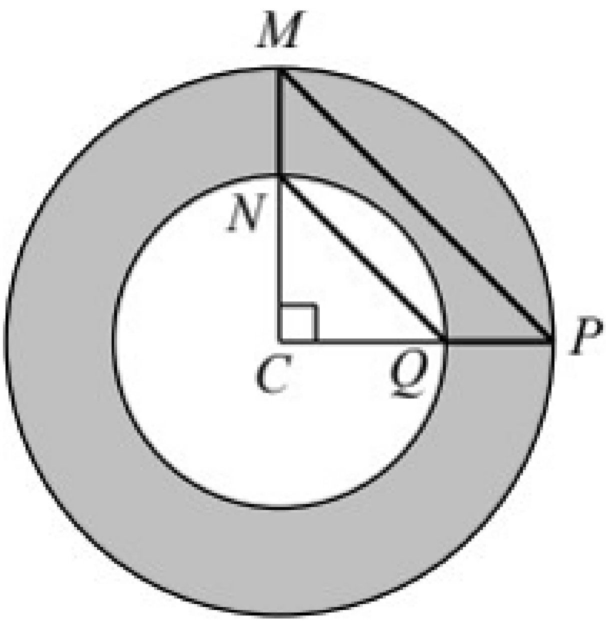
Starting from b, each number is the average of the previous two numbers. If the difference between f and g is 1, what is the smallest possible value of a?

Câu 21 In the figure below, AB is the diameter of the circle with centre O. Two circles are drawn with AO and OB as diameters. In the region between the circumferences, a circle with centre D is inscribed to touch the other three circles. If the length of the radius of the circle D is 8 cm, find the length, in cm, of AB.



Câu 22 A total of 555 balls are distributed into 11 boxes such that all boxes contain different numbers of balls. If the number of balls in each box must contain the digit '5', what is the greatest possible number of balls in a box?

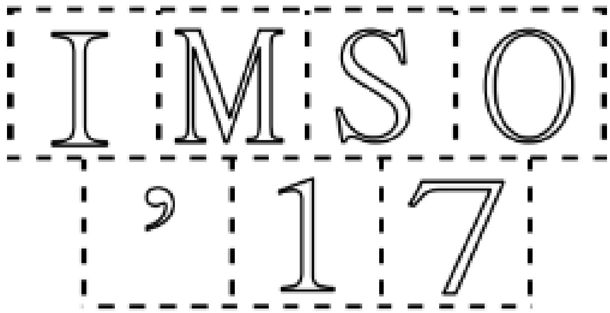
Câu 23 In the figure below, the area of trapezium MNQP is 21 cm^2. C is the centre of both the big and small circles and MC is perpendicular to CP.
Find the area, in cm^2, of the shaded region.
(take $\pi = \dfrac{22}{7}$



Câu 24 Every unit square on a 8×8grid table is painted in one of eight different colours. Each colour is used at least once and any two unit squares sharing a common side cannot be of the same colour. Two colours are friendly if there are two unit squares sharing a common side which are painted in these two colours. What is the minimum number of friendly pairs of colours ?

Câu 25 The organizer wants to paint the figure below which comprises of 7 dotted grid squares with characters written on it.

Each grid square should not be of the same color as any of its adjacent grid squares. For



example, the grid square with S cannot have the same color as those with M, O, 1 and 7. If there are four different colors to choose from, in how many different ways can the organizer paint the figure?

4.2.4 Lời giải cho đề ôn tập số 2:

.

Câu 1 Thử một số các TH nhỏ bắt đầu từ $n - 96$, ta có thể thấy để thỏa mãn cả 3 điều kiện thì chỉ có TH $n - 96 = 5$ là nhỏ nhất và thỏa mãn. Vậy $n = 101$ là số nhỏ nhất thỏa mãn đề bài

Câu 2 Có 2 cách đi qua mỗi hình tròn, có 5 hình tròn nên sẽ có tổng cộng: $2^5 = 32$ cách đi qua cả 5 hình tròn.

Câu 3 Nếu Alex tiêu x đô ở ngày đầu tiên thì anh ta sẽ tiêu $x + 20$ đô ỏ ngày thứ 6 và tổng cộng ở cả 7 ngày anh ta tiêu: $7x + 84$. Từ đó ta có thể suy ra $x = 5$ và ngày thứ 6 anh ta tiêu 25 đô.

Câu 4 Ta có:
$A = \frac{9}{10} + \frac{18}{100} + \frac{27}{1000} + ...$
$= \frac{9}{10} + \frac{18}{100} + ..$
$=> 10 \times A = 9 + \frac{18}{10} + ...$
$=> 9 \times A = 9 + \frac{9}{10} + \frac{18}{10^2} + ...$
$= 9 + A$ Vì thế, $8 \times A = 9$ and $A = \frac{9}{8}$ Vậy $A = \frac{9}{8}$

Câu 5 Bắt đầu từ những giá trị nhỏ nhất: 18,28,.. ta thấy 38 là số nhỏ nhất mà "siêu may mắn". Đáp số: 38

Câu 6 Chúng ta lật ngược lại từ thứ 5, tính dần số bi để lật ngược lại số bi ban đầu. Ta có thể thấy số bi ban đầu mà Parry có sẽ là 8 viên bi. Đáp số: 8 viên bi

Câu 7 $A + B = 9B$ chia hết cho 9 nên tổng các chữ số của $A + B$ chia hết cho 9. Chúng ta hoàn toàn có thể chặn được tổng các chữ số của $A + B$ nhỏ hơn 18, do chữ số đầu tiên của B bắt buộc là 1. Từ đó tính được tổng các chữ số $A + B$ là 9. Đáp số: 9

Câu 8 Coi một cạnh hình vuông có độ dài đơn vị là 2, ta có thể bắt đầu đếm từ những tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là $1, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta thấy có tổng cộng 32 tam giác được đếm. Đáp số: 32

Câu 9 Gọi cân nặng ban đầu trước khi bị điêu khắc là x. Sau lần 1, cân nặng còn lại là $x \times 65\%$ và sau 3 lần cân nặng còn lại là: $x \times 65\% \times 80\% \times 75\%$. Từ đó dễ tính được phần còn lại của bức tượng có cân nặng là 48.75kg và dễ tính được x. Đáp số: 125

Câu 10 Hiển nhiên nếu mỗi chữ số từ 0 đến 9 xuất hiện 1 lần thì số đó chia hết cho 9. Vậy ta sẽ tìm số lớn nhất thỏa mãn để chia hết cho 4, và dễ thấy số lớn nhất là: 9876543120. Đáp số: 9876543120

Câu 11 Sau 8 lượt thì Jack sẽ đi được tối đa 32, do đó có ít nhất 3 lượt Jack bước 2 bước. Xét từng trường hợp ra và có thể thấy số trường hợp xảy ra sẽ là 56 trường hợp. Đáp số: 56 trường hợp. Đáp số: 56 trường hợp

Câu 12 Gọi x là số thỏa mãn $\frac{537 - x}{463 + x} = \frac{1}{9}$. Nhân chéo lên sẽ có $x = 437$. Đáp số: 437

Câu 13 Mỗi góc ở đó sẽ đại diện cho các cung HI, IJ, JK, KL, LM nên tổng các góc của đề bài sẽ có tổng là: $\frac{180}{2} = 90$ độ. Đáp số: 90

Câu 14 Số lớn có dạng 'palindrom' mà đứng ngay sau 16961 sẽ là 17071. Do đó, xe đó sẽ phải đi thêm: $17071 - 16961 = 110$ km. Đáp số 110km

Câu 15 Tổng trên có độ lớn bằng: $100a + 110b + 111c + 111d + 11e + f$, do đó để tổng lớn nhất thì $c = 9, d = 8, b = 7, a = 6, e = 5, f = 4$ khi cộng lại ta sẽ được giá trị là 3316. Đáp số: 3316

Câu 16 Cộng tổng các góc đưa về tam giác to nhất ở giữa, ta sẽ được tổng các góc thỏa mãn đề bài là 180. Đáp số: 180

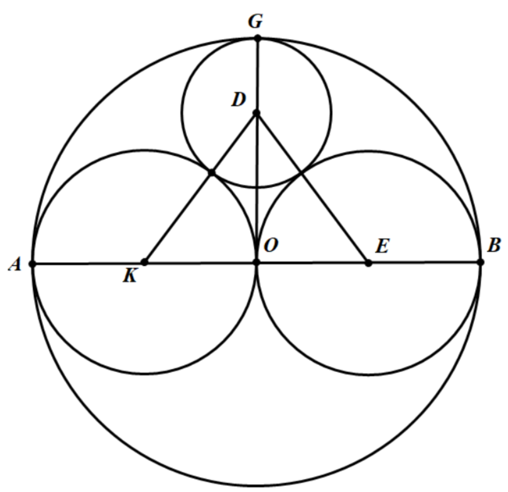
Câu 17 Ta có thể tính tỉ lệ: $\frac{\overline{IJ}}{\overline{FC}} = \frac{1}{2}$ nên nếu $\overline{IJ} = x$ thì $\overline{FC} = 2x$ và tương tự ta sẽ có $\overline{EI} = \frac{x}{2}$ do đó ta có $\overline{BC} = \frac{5x}{2}$. Vậy tỉ lệ ABCD bị tô đậm là : $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$. Đáp số: $\frac{4}{25}$

Câu 18 Từ bài toán có thể tính được diện tích tam giác BDC là $7cm^2$ nên ta sẽ tính được tỉ lệ: $\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$. Từ đó theo định lý Thales sẽ tính được $\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$. Ta tính được cả diện tích tam giác ABC từ đó tính được cạnh AC. Và vì vậy, ta tìm được độ dài cạnh AD là 10cm. Đáp số: 10 cm.

Câu 19 Ta có:
$160 + A^2 = 5 + B^2 => (B - A)(B + A) = 155$. Tương tự ta cũng sẽ có: $(C - A)(C + A) = 315$.Phân tích nhân tử ta tính được A duy nhất thỏa mãn cả 2 trường hợp là $A = 13, B = 18, C = 22$. Đáp số: 13

Câu 20 Ta có thể tính các số theo đẳng sau theo biến a, lại có hiệu giữa f và g là 1 nên ta có 2 trường hợp xảy ra: $|f - g| = 1$. Từ đó tính được giá trị nhỏ nhất của a là 1953. Đáp số: 1953

Câu 21 K,E lần lượt là trung điểm AO và BO như hình vẽ. Đặt $KO = x$, ta sẽ có $KD = x + 8$ và tương tự $DE = x + 8$. G là tiếp điểm đường tròn tâm D và đường tròn tâm O, ta có: $DO = 2x - 8$. Từ đó theo định lý Pytago, ta sẽ có: $DO = \sqrt{DK^2 - KO^2}$ từ đó tính được $x = 12$ và $AB = 48$. Đáp số: 48



Câu 22 Bạn đọc thử tự giải. Đáp án: 165

Câu 23 Ta có diện tích hình thang MNPQ là hiệu diện tích 2 tam giác MCP và NCQ. Đặt $MC = x$ và $NC = y$, ta có: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 21 => x^2 - y^2 = 42$. Diện tích phần tô đậm là: $\frac{x^2 \times 22}{7} - \frac{y^2 \times 22}{7} = 42 \times \frac{22}{7} = 132$. Đáp số: 132

Câu 24 Bạn đọc thử tự giải bài 24. Đáp số: 7

Câu 25 Bạn đọc thử tự giải bài 25. Đáp số: 384

Chương 5

Iran Geometry Olympiad (IGO):

5.1 Giới thiệu kì thi:

5.1.1 Mở đầu:

Olympic hình học Iran, viết tắt là IGO, là cuộc thi dành cho học sinh THCS-THPT từ lớp 7-12, và cả các bạn đã tốt nghiệp nhưng đam mê hình học. Kỳ thi này do BTC Iran khởi xướng lần đầu vào năm 2014 và đến nay là kỳ thi lần thứ 6, mở rộng ra nhiều nước. Thí sinh sẽ giải 5 bài toán tự luận trong thời gian 270 phút. Việt Nam tính đến giờ đã tham gia lần thứ 3, với sự thành công của kỳ thi 2018 với khoảng 600 thí sinh. Kỳ thi này bao gồm các bài toán hình học, đẹp cả về nội dung lẫn hình thức, hứa hẹn sẽ tạo cho các thí sinh các cơ hội thử thách, trải nghiệm thú vị.

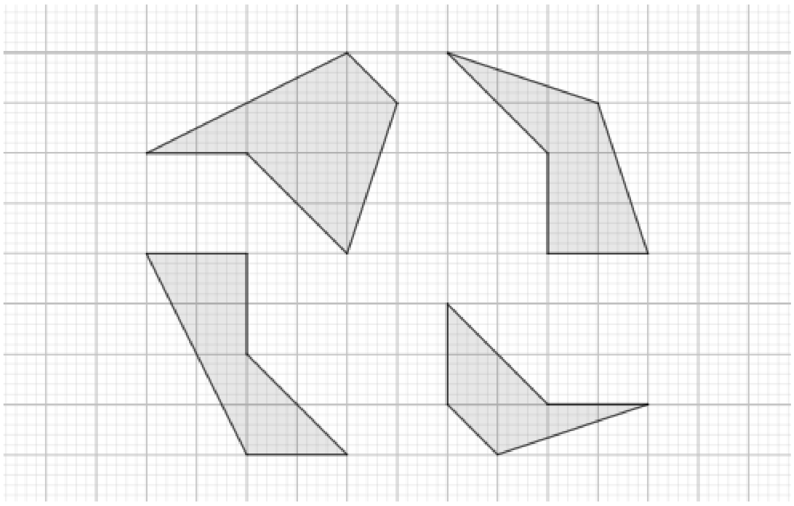
5.1.2 Các thí sinh hợp lệ:

-Đề thi sẽ được phân chia thành 3 cấp độ khác nhau: Elementary, Intermediate và Advanced. -Mỗi cấp độ thi sẽ phù hợp với lứa tuổi thi khác nhau. Elementary được đánh giá là cấp độ thi phù hợp cho lớp 7-8, Intermediate được đánh giá dành cho lớp 9-10 và Advanced được đánh giá dành cho lớp 11-12.

5.2 Các đề ôn tập:

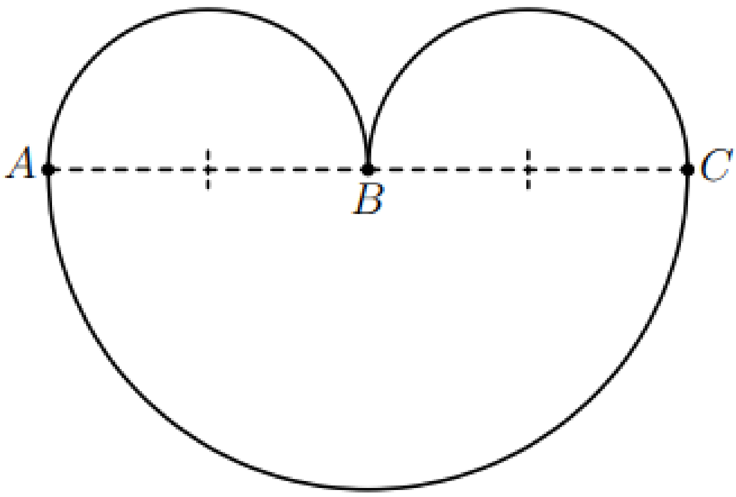
5.2.1 Đề ôn tập thứ 1:

Câu 1 With putting the four shapes drawn in the following figure together make a shape with at least two reflection symmetries



Câu 2 Points K, L, M, N lie on the sides AB, BC, CD, DA of a square ABCD, respectively, such that the area of KLMN is equal to one half of the area of ABCD. Prove that some diagonal of KLMN is parallel to some side of ABCD.

Câu 3 As shown in the following figure, a heart is a shape consist of three semicircles with diameters AB, BC and AC such that B is midpoint of the segment AC. A heart (W) is given. Call a pair (P, M) bisector if P and M lie on (W) and bisect its perimeter. Let (P, M) and (Q, N) be bisector pairs. Tangents at points P, M,Q, and N to (W) construct a convex quadrilateral XYZT. If the quadrilateral XYZT is inscribed in a circle, find the angle between lines PM and QN.

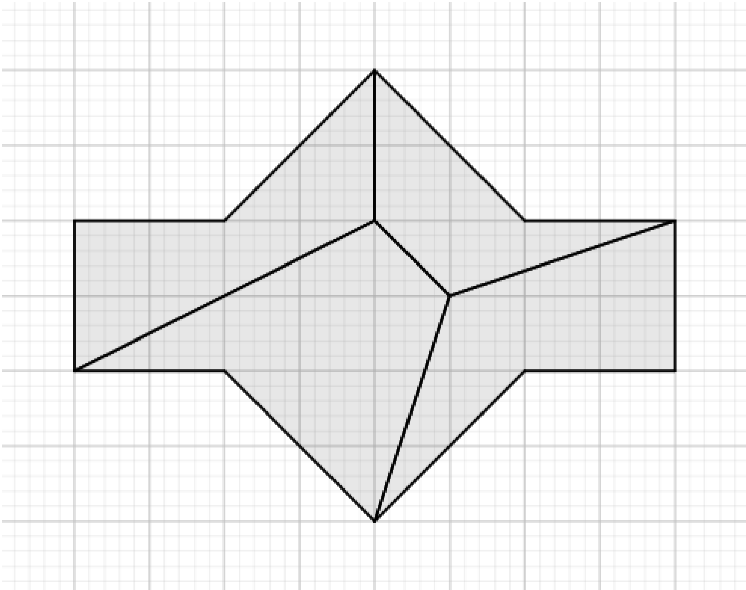


Câu 4 In isosceles trapezoid ABCD (AB is parallel to CD) points E and F lie on the segment CD in such a way that D, E, F and C are in that order and $DE = CF$. Let X and Y be the reflection of E and C with respect to AD and AF. Prove that circumcircles of triangles ADF and BXY are concentric.

Câu 5 Let A1, A2, . . . , A2021 be 2021 points on the plane, no three collinear and $\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + ... + \angle A_{2021}A_1A_2 = 360$, in which by the angle $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ we mean the one which is less than 180 (assume that $A_{2022} = A_1$ and $A_0 = A_{2021}$). Prove that some of these angles will add up to 90 .

5.2.2 Lời giải đề ôn tập số 1 :

Câu 1 Lời giải:

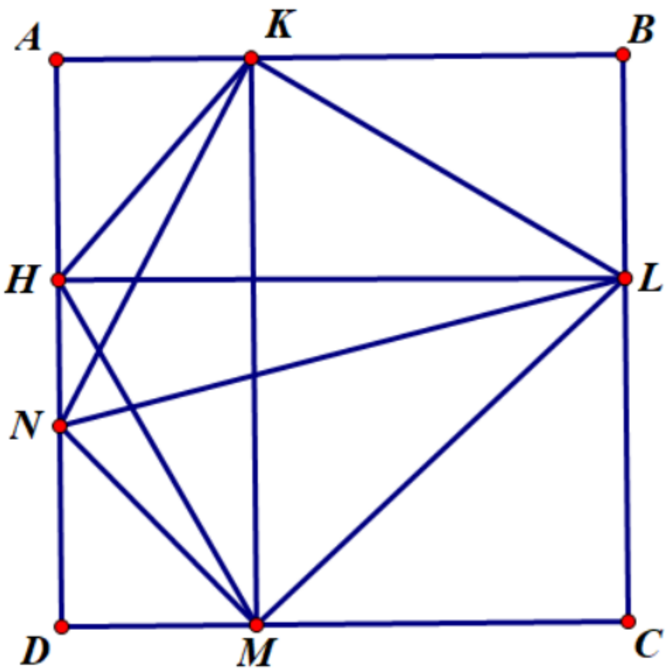


Câu 2 Lời giải:

Lấy H thuộc AD thỏa mãn HL song song AB và song song CD.

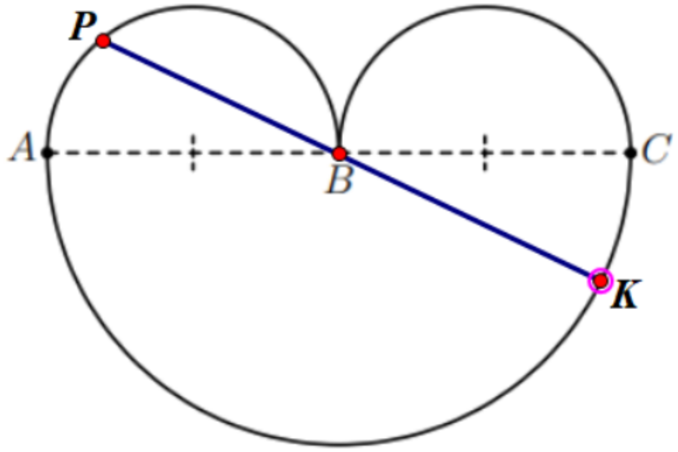
Ta thấy: diện tích tứ giác KHML được chia thành 4 phần và mỗi phần có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình chữ nhật bao quanh nó. Do đó diện tích tam giác KHM bằng diện tích tam giác KMN.

Vì vậy, KMNH là hình thang và từ đó ta sẽ có: KM song song HN hay song song AD. Ta có điều phải chứng minh.



Câu 3 Ta đi chứng minh bổ đề sau: Nếu P và M là 2 điểm nằm trên (W) sao cho 2 điểm này chia (W) thành 2 phần có chu vi bằng nhau thì P,M,B thẳng hàng.

Chứng minh: Giả sử: P nằm trên $\overset{\frown}{AB}$, khi đó gọi PB giao với $\overset{\frown}{AC}$ tại K. Ta sẽ đi chứng minh K trùng M.



Đặt $AB = 2 \times x$ trong đó $x > 0$ Thật vậy, chu vi $\overset{\frown}{AC}$ là:

$$\pi \times 2 \times x$$

Và tổng chu vi 2 cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{BC}$:

$$\pi \times 2 \times x$$

Ta đi chứng minh độ dài $\overset{\frown}{AP}$ bằng độ dài $\overset{\frown}{CK}$.

Độ dài $\overset{\frown}{PA}$ là: $\overset{\frown}{PA}= 2 \times \dfrac{\angle PBA \times \pi \times x}{180}$

Độ dài $\overset{\frown}{CK}$ là: $\overset{\frown}{CK}= \dfrac{\angle CBK \times \pi \times x \times 2}{180}$

Lại có $\angle PBA = \angle CBK$ nên ta có bổ đề được chứng minh. Quay lại bài toán:

TH1: Không mất tính tổng quát, ta giả sử P,Q thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và khi đó, M,N thuộc cung lớn $\overset{\frown}{AC}$

Do tứ giác XYZT nội tiếp nên $\angle TXY = \angle TZY$. Ta có vì XP,XQ là tiếp tuyến đường tròn tâm B bán kính BC nên: $\angle MBN = 2 \times \angle NMX = 2 \times \angle MNX$. Tường tự, ta sẽ có: $\angle PBQ = \angle ZPQ = \angle ZQP$.

Do đó ta sẽ có biểu thức sau:

$\angle TZY = \angle TXY = 180 - \angle NXM = \angle NBM = \angle PBQ = \angle ZPQ = \angle ZQP$

từ đó ta có $\angle PBQ = \angle TZY = 60$

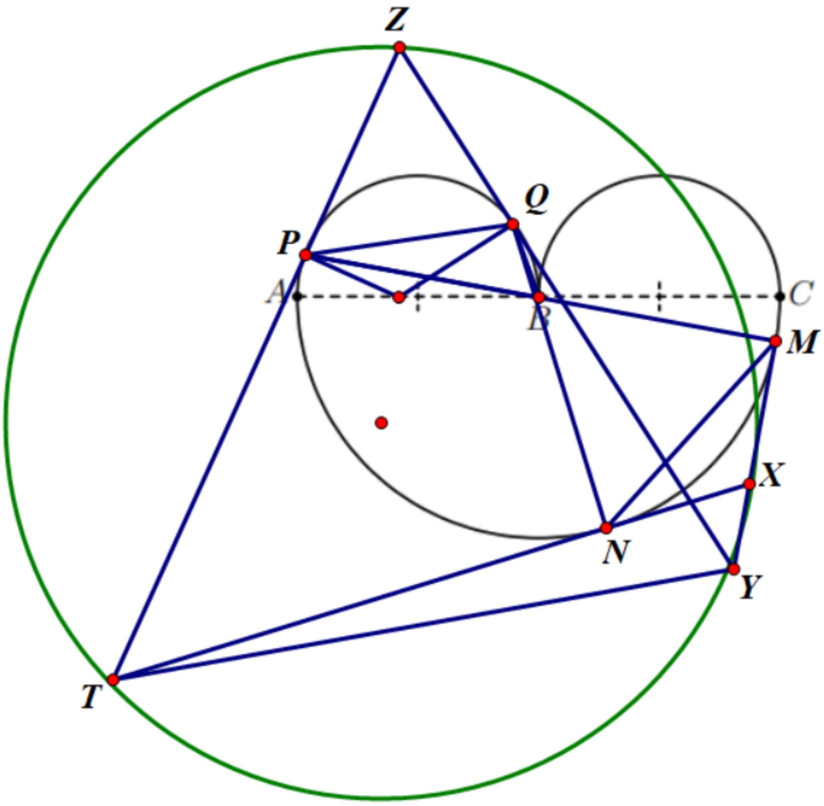
Đáp số cho trường hợp 1 là 60 độ.

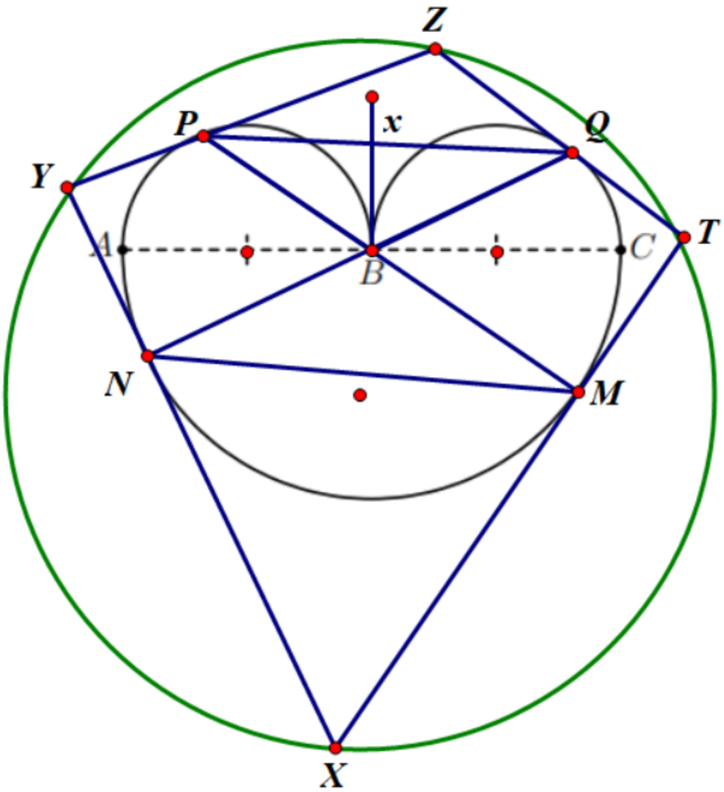
Th2: :P,Q nằm ở 2 cung khác nhau là $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{BC}$.

Từ B kẻ Bx là tiếp tuyến chung 2 cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$. Ta có:

$\angle xBP = \angle ZPB$ và $\angle xBQ = \angle ZQB$.

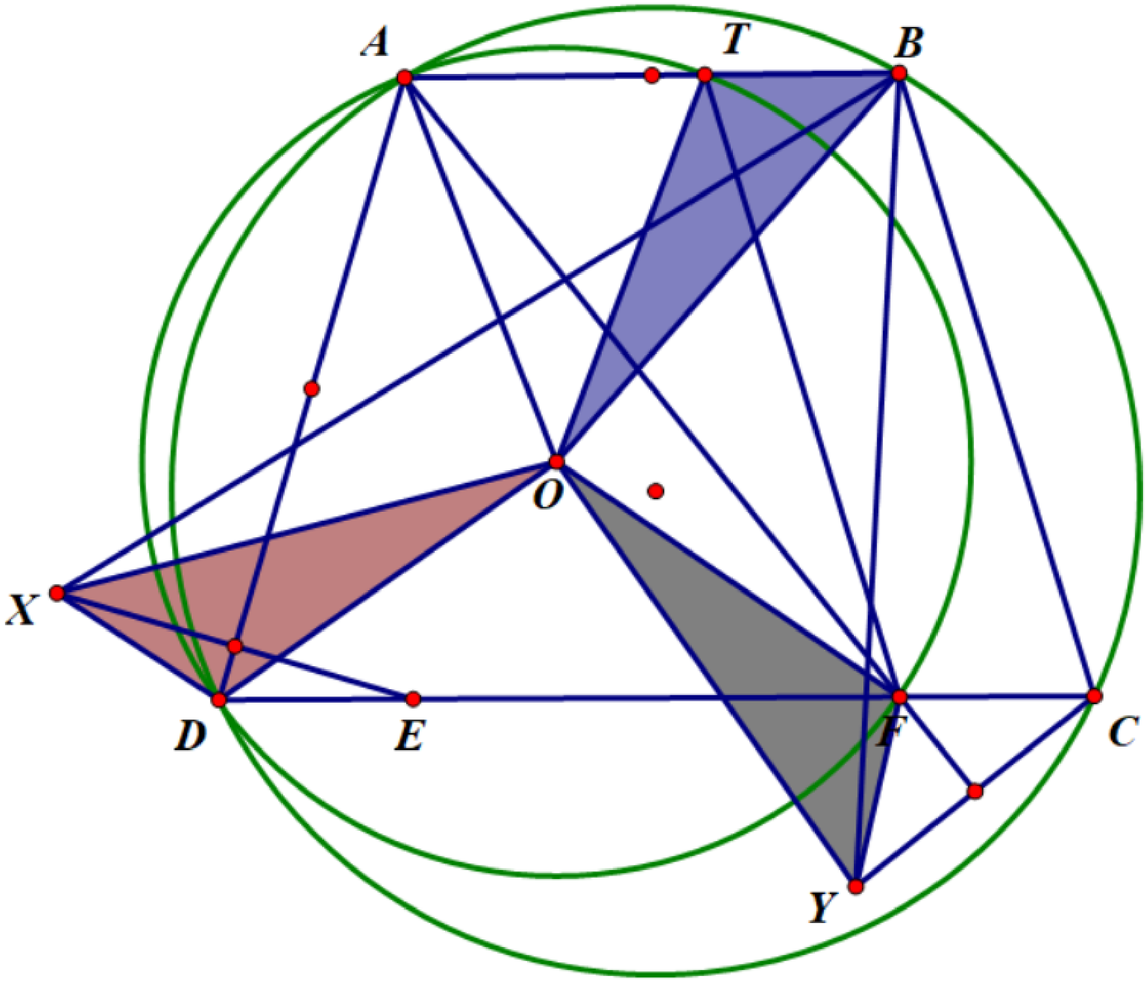
Khi đó: $\angle PZQ = 360 - 2 \times PBQ$. Lại có: $NBM = 180 - NXM$ nên ta sẽ có:





$\angle NXM = 180 - \angle NBM = 180 - \angle PBQ = 180 - \dfrac{360 - \angle PZQ}{2} = \dfrac{\angle PZQ}{2}$.
Hai góc này cộng nhau bằng 180 độ nên $\angle NXM = 60$ hay $\angle NBM = 120$.
Đáp số cho trường hợp này là 120 độ.

Câu 4 Lấy T thuộc AB sao cho TBFC là hình bình hành. AF cắt YC tại K.



Ta có: $BC = AD = TF$ nên ATFD là hình thang cân, từ đó ta cũng có thể dễ dàng suy ra rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình thang ATFD hay $OT = OA = OF = OD$. Ta cũng có:

$XD = DE = CF = FY = TB$. Ta đi chứng minh 3 góc $\angle ODX = \angle OFY = \angle OTB$.

$\angle ODX = \angle ODA + \angle XDA = 90 - \angle AFD + \angle ADF$

$\angle OTB = \angle OTF + \angle BTF = \angle ADF + \angle OAD = \angle ADF + 90 - \angle AFD$

$\angle OFY = \angle AFY - \angle OFA = 180 - \angle AFD - \angle OFA = \angle ADF + 90 - \angle AFD$

Như vậy từ đó ta sẽ chứng minh được 3 tam giác $\triangle OTB = \triangle OFY = \triangle ODX$ hay $OX = OB = OY$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 5 Gọi X_i là độ lớn các góc $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ mà giá trị góc nhỏ hơn 180 độ.

Nếu bắt đầu đi từ đỉnh A, đến đỉnh A_i, ta sẽ phải xoay một góc có giá trị là $180 - X_i$ theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ. Nếu đặt M_1 là tập số lần mà người đó xoay theo chiều kim đồng hồ và M_2 là tập số lần mà người đó xoay theo ngược chiều kim đồng hồ. Tại một số lần cố định, vì đi hết 1 vòng nên người đó đã phải xoay k lần 360 độ. Từ đó ta có:

$$360 \times k = \Sigma(180 - X_i) - \Sigma(180 - X_j)$$

trong đó X_i là tập các phần tử thuộc M_1 và X_j là tập các phần tử thuộc M_2.

Lại có tổng số phần tử 2 tập là 2021 là 1 số lẻ nên ta có đẳng thức tương đương với:

$$180 \times (2t + 1) = \Sigma(180 - X_i) - \Sigma(180 - X_j)$$

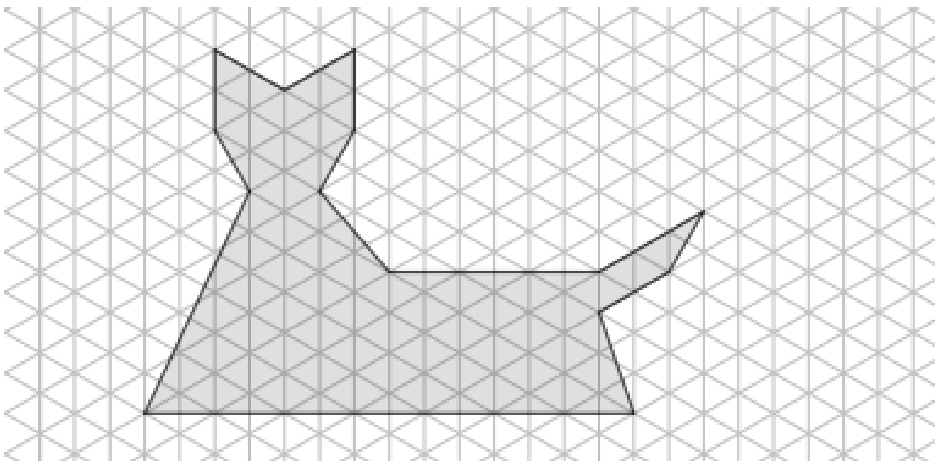
Tổng 2 góc này cộng nhau bằng 180 độ nên từ đó 2 tổng trên phải có 1 tổng bằng 90 một tổng bằng 270. Ta có điều phải chứng minh.

.

5.2.3 Đề ôn tập thứ 2:

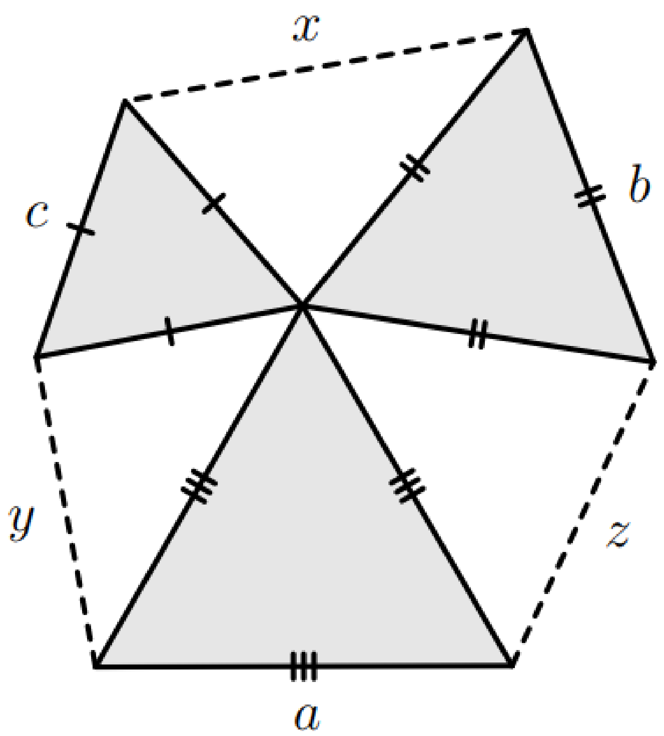
Câu 1 By a fold of a polygon-shaped paper, we mean drawing a segment on the paper and folding the paper along that. Suppose that a paper with the following figure is given. We cut the paper along the boundary of the shaded region to get a polygon-shaped paper. Start with this shaded polygon and make a rectangle-shaped paper from it with at most 5 number of folds. Describe your solution by introducing the folding lines and drawing the shape after each fold on your solution sheet.

(Note that the folding lines do not have to coincide with the grid lines of the shape.)



Câu 2 A parallelogram ABCD is given (AB 6= BC). Points E and G are chosen on the line CD such that AC is the angle bisector of both angles $\angle EAD$ and $\angle BAG$. The line BC intersects AE and AG at F and H, respectively. Prove that the line FG passes through the midpoint of HE.

Câu 3 According to the figure, three equilateral triangles with side lengths a, b, c have one common vertex and do not have any other common point. The lengths x, y and z are defined as in the figure. Prove that $3(x + y + z) > 2(a + b + c)$.



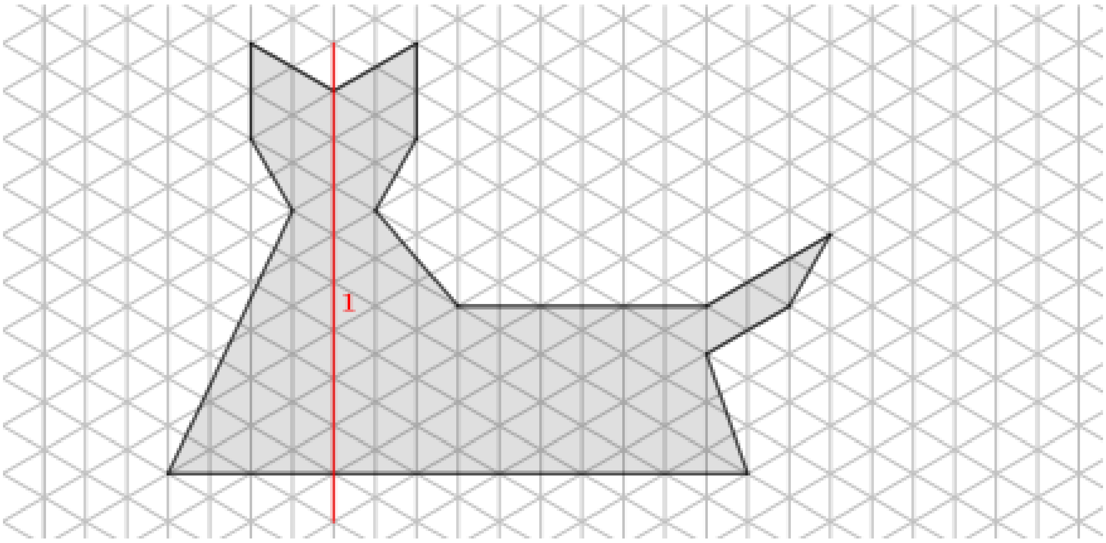
Câu 4 Let P be an arbitrary point in the interior of triangle ABC. Lines BP and CP intersect AC and AB at E and F, respectively. Let K and L be the midpoints of the segments BF and CE, respectively. Let the lines through L and K parallel to CF and BE intersect BC at S and T, respectively; moreover, denote by M and N the reflection of S and T over the points L and K, respectively. Prove that as P moves in the interior of triangle ABC, line MN passes through a fixed point.

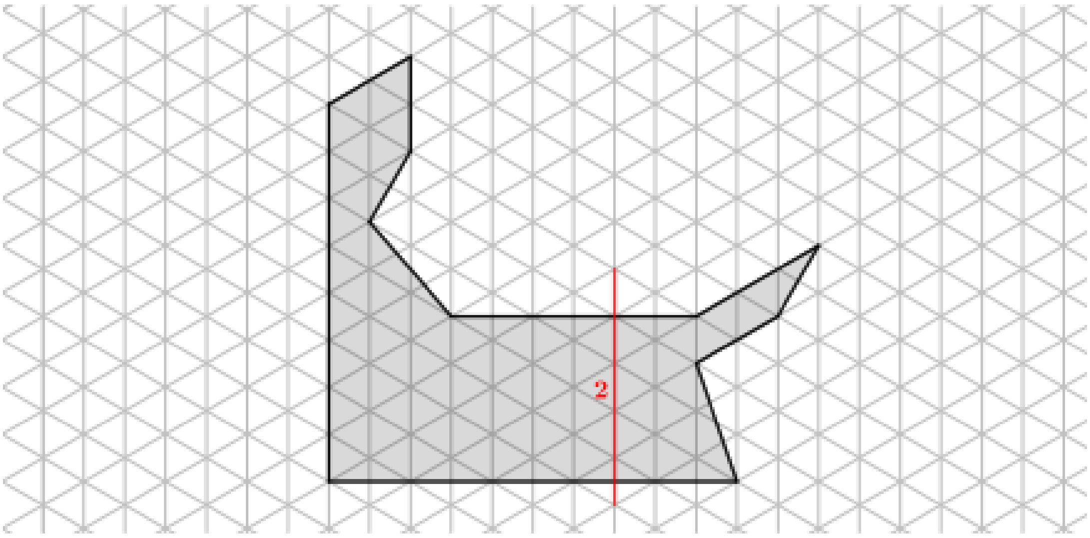
Câu 5 We say two vertices of a simple polygon are visible from each other if either they are adjacent, or the segment joining them is completely inside the polygon (except two endpoints that lie on the boundary). Find all positive integers n such that there exists a simple polygon with n vertices in which every vertex is visible from exactly 4 other vertices. (A simple polygon is a polygon without hole that does not intersect itself.) .

5.2.4 Lời giải đề ôn tập số 1 :

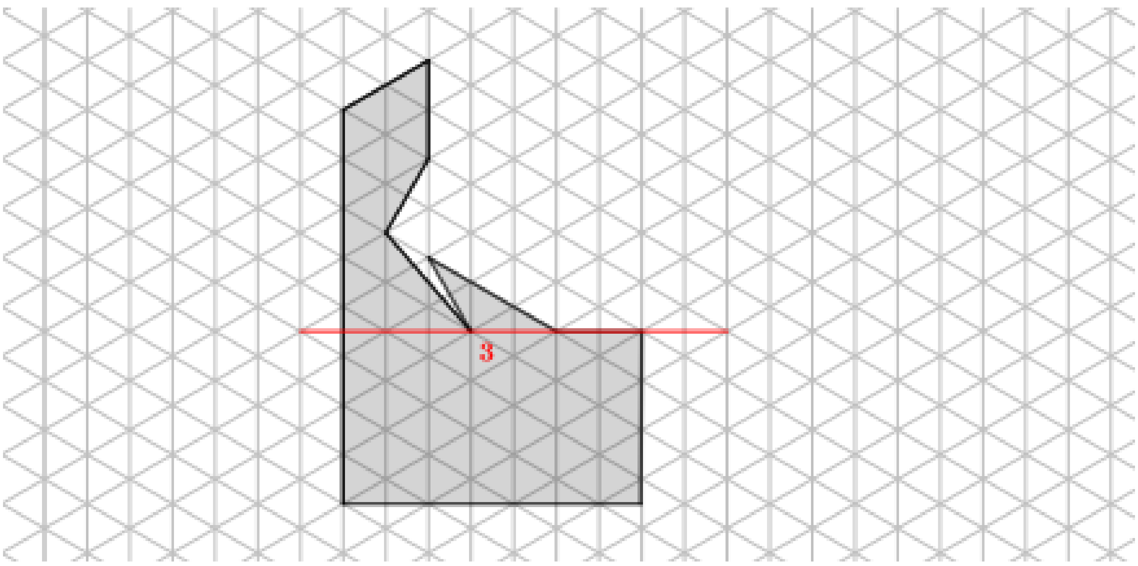
Câu 1 Chúng ta có thể gập bằng 4 lần như sau:
Lần 1:

Lần 2:

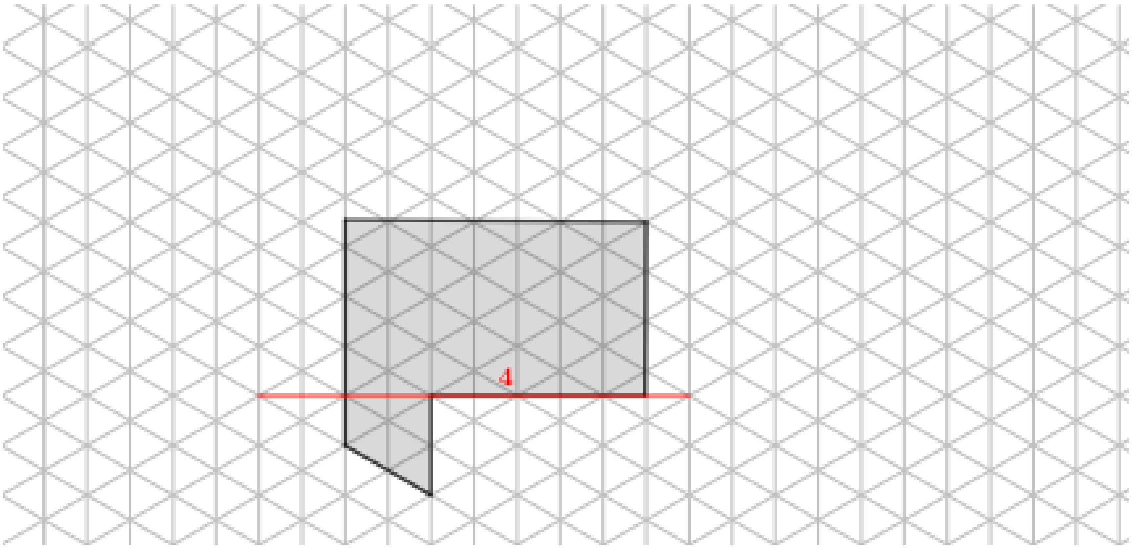




Lần 3:

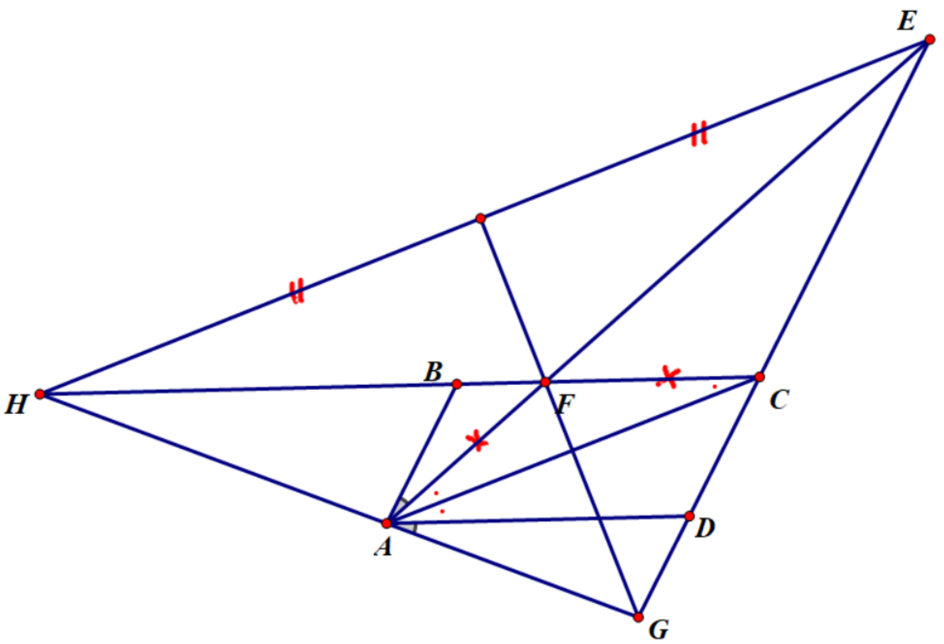


Lần 4:



Câu 2 Ta có: $\angle FAC = \angle CAD = \angle ACF$ nên suy ra $AF = FC$.

Tương tự ta sẽ chứng minh được $GA = GC$ hay $\triangle GAF = \triangle GCF$. Vì thế ta có $\angle HAF = \angle FCE$. Lại có $\angle HFA = \angle EFC$ nên $\triangle HFA = \triangle EFC$. Từ đó có GF là trục đối xứng của AC cũng là trục đối xứng HE. Ta có điều phải chứng minh.

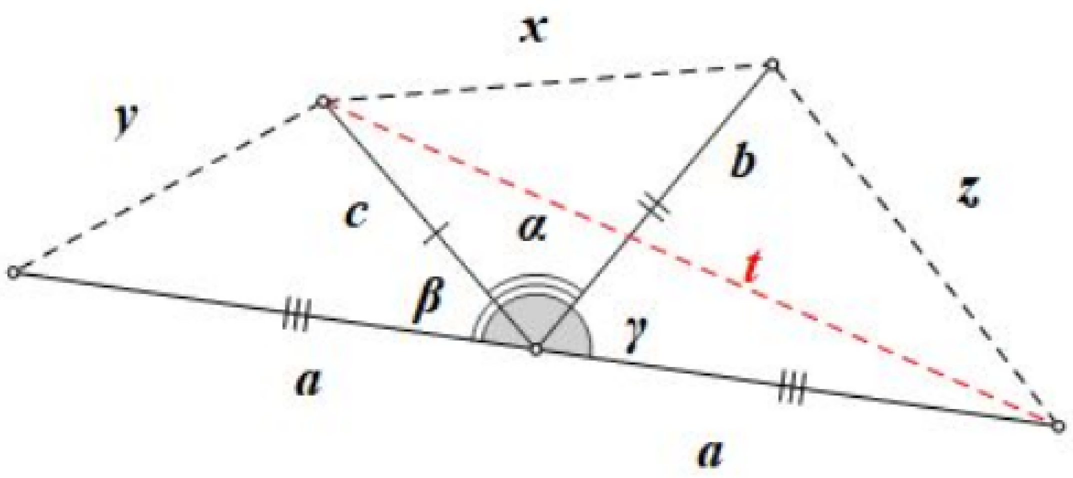


Câu 3 Xoay hình tam giác trắng 60 độ theo chiều kim đồng hồ sẽ khiến các cạnh của các tam giác trắng dính vào nhau. Đầu tiên ta chọn 1 hình tam giác trắng, xoay 60 độ để nó gắn liền với một cạnh một tam giác trắng khác.

Tiếp tục xoay cái hình gắn liền các cạnh này thêm 60 độ sẽ được tạo nên 1 đường gấp khúc có độ dài là $x + y + z$. Hai khoảng cách 2 đầu đường gấp khúc là $2a$ nên ta có:

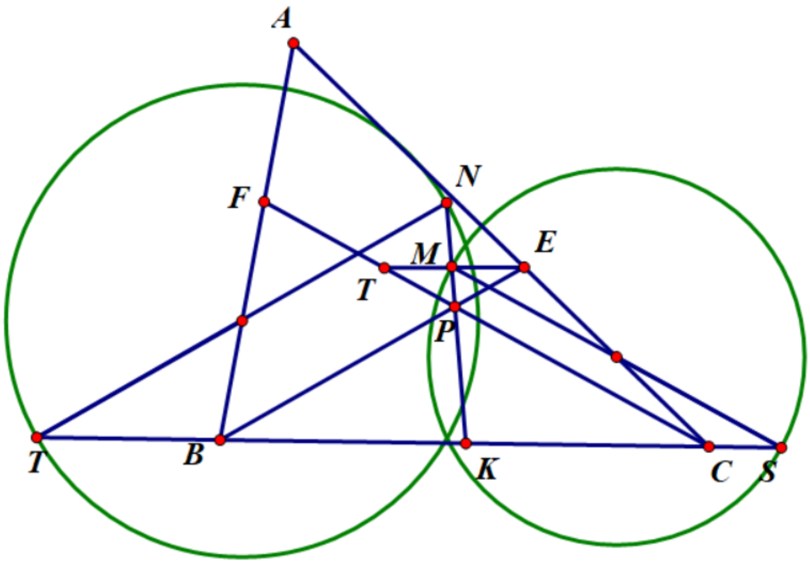
$$x + y + z > 2a$$

Chứng minh tương tự cộng lại vế với vế ta có điều phải chứng minh.



Câu 4 EM cắt FC tại T.

MP cắt BC tại K



Ta có EC và MS đi qua trung điểm mỗi đường nên EMCS là hình bình hành. Do đó ta có $EM = SC$. Vì MS song song TC, lại có TM song song CS nên TMSC là hình bình hành. Từ

đó ta có: $TM = CS = ME$.
Theo định lý Thales ta có:
$\frac{\overline{TM}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{BK}}$
Mà $TM = ME$ nên $BK = KC$ hay MP đi qua trung điểm BC. Chứng minh tương tự NP đi qua trung điểm BC hay MN đi qua trung điểm BC là điểm cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 5 Ta sẽ định nghĩa lại từ "visible" trong đề bài là các đỉnh có thể "nhìn thấy nhau". Ta sẽ chứng minh bài toán bằng 2 bổ đề sau:
Bổ đề 1: Nếu A_i có thể nhìn thấy $A_{i-1}, A_j, A_k, A_{i+1}$ thì A_{i-1}, A_j có thể nhìn thấy nhau, A_j, A_k có thể nhìn thấy nhau, A_k, A_{i+1} có thể nhìn thấy nhau.
Bổ đề 2: Giả thuyết tương tự bổ đề 1, chứng minh A_j, A_k là 1 cạnh.
2 bổ đề này bạn đọc thử tự chứng minh.
Từ bổ đề thứ 2 ta cũng có thể suy ra $n \leq 6$.
Quay lại bài toán giả sử tồn tại i thỏa mãn A_{i-1} và A_{i+1} có thể nhìn thấy nhau, theo bổ đề 2, A_{i-1} có thể nhìn thấy A_{i+2}, A_{i+1} nhìn thấy A_{i-2}, A_{i-2} nhìn thấy A_{i+2}. Vậy là có 4 đỉnh có thể nhìn từ A_{i-1} và A_{i+1}. Theo bổ đề 1: A_{i-1} và A_{i+1} đều có thể nhìn thấy A_i và A_i cũng nhìn thấy A_{i-2} và A_{i+2}. Theo bổ đề 2 ta có thể suy ra $A_{i-2}A_{i+2}$ là 1 cạnh. (1)
Ta xét TH riêng $n = 6$:
Từ bổ đề 2 có thể thấy A_iA_j, A_jA_k, A_kA_i là các đường chéo của hình đa giác đã cho. và từ khẳng định (1), giả sử các điểm đó là A_2, A_4, A_6. A_3 không thể nhìn thấy A_6, cũng không nhìn A_1 và A_5 (mâu thuẫn). Vậy số đỉnh thỏa mãn duy nhất là 5, hay đa giác đó là ngũ giác.

.

5.3 Tài liệu tham khảo:

Một số tài liệu tham khảo:
https://artofproblemsolving.com/community/c13_contest_collections
https://cmath.edu.vn/tai-lieu/de-thi-vmtc-khoi-3-4-5-6-7-8-9-nam-hoc-2020-2021/
https://drive.google.com/drive/folders/1Z73ihKB4AtqdS5ZpkBH5TQKWghIVTOjm
https://imogeometry.blogspot.com/p/iranian-geometry-olympiad.html
Ngoài những trang ở trên nơi các em có thể đọc thêm để tham khảo, anh tin rằng có 1 kì thi khá thích hợp cho các bạn học sinh lớp 8 muốn thử sức và có ý định thi chuyên Toán. Đây là JBMO, một kì thi vùng Balkan dành cho lứa tuổi Junior của Châu Âu nơi các em có thể tiếp xúc khá nhiều với toán chuyên cấp 3: https://artofproblemsolving.com/community/c3227_junior_balkan_mo.

CHÚC CÁC EM LUÔN GIỮ NGỌN LỬA ĐAM MÊ VỚI TOÁN HỌC!